Feuille de travaux dirigés n°2
Tribus, mesures, applications mesurables et intégration

Exercice 1:

1. Déterminer les limites des suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(A'_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définies par :
$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1\right] \quad \text{et} \quad A'_n = \left]-\frac{1}{n}, 1\right]$$
2. Donner un exemple de suite non constante de parties de $\mathbb{R}$ dont la limite est $]0,1]$.
3. Déterminer les limites supérieure et inférieure de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définie par :
$$B_{2n-1} = \left]-2-\frac{1}{n}, 1\right] \quad \text{et} \quad B_{2n} = \left[-1, 2+\frac{1}{n^2}\right[$$
4. Existe-t-il une suite $(C_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ telle que
$$\underset{n}{limsup} C_n = [-1,2] \quad \text{et} \quad \underset{n}{liminf} C_n = [-2,1]?$$
5. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels qui convergent respectivement vers -1 et 1.
   (a) Trouer la condition sur ces deux suites pour que $\underset{n}{lim}[a_n, b_n] = [-1, 1[$.
   (b) Est-il possible que $lim_n[a_n, b_n]$ n'existe pas?

Exercice 2:

1. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons d'un ensemble E?
2. A supposer que le cardinal de E est supérieur à 2, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (c'est à dire des ensembles à 2 éléments) de E?
3. Une partie A de E étant fixée, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A?
4. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux tribus de E. Décrire simplement la tribu engendrée par $\mathcal{E}\cap\mathcal{F}$, puis la tribu engendrée par $\mathcal{E}\cup\mathcal{F}$.
5. Quelle est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{A} = \{[0,2],[1,3]\}$? Quel est son cardinal?

Exercice 3:

1. Soit A une partie d'un ensemble E distincte de l'ensemble vide et de E. Montrer que la tribu engendrée par $\{A\}$ est l'union de $\{\emptyset, E\}$ et d'une partition.

2. Soit $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ une partition de E en trois sous-ensembles. Décrire la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.
3. Plus généralement, décrire la tribu engendrée par une partition dénombrable de E.
4. Une tribu $\mathcal{E}$ définit naturellement une partition $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ de E, dont les éléments sont les parties de la forme
$$\bar{x} = \bigcap_{x \in A \in \mathcal{E}} A, \quad x \in E.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ est une partition de E
   (b) Montrer que si la tribu $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable, la partition $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ qui lui est associée engendre $\mathcal{E}$.
   (c) Montrer que si $\mathcal{E}$ est engendrée par une partition au plus dénombrable $\mathcal{B}$, cette partition est $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$.
   (d) Quelle partition engendre la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par le singleton $\{[0,1]\}$? et par la paire $\{[0,1],[0,2]\}$? Quel est la cardinal de ces tribus?
   (e) Montrer que la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est engendrée par aucune partition de $\mathbb{R}$.

Exercice 4:
Soit E un ensemble.

1. Soient $\mathcal{E}$ une tribu de E et A une partie de E. Montrer que la fonction indicatrice 1_A est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{E}$ si et seulement si $A \in \mathcal{E}$.
2. Soient $\mathcal{A}$ une partition au plus dénombrable de E, $\mathcal{E}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et f une fonction réelle sur E. Montrer que f est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{E}$ si et seulement si elle est constante sur chaque partie $A \in \mathcal{A}$.
3. Soient $\mathcal{E}$ une tribu de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables réelles sur E et A l'ensemble des éléments x de E tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy. Montrer que $A \in \mathcal{E}$.
4. L'inverse d'une bijection mesurable est-elle toujours mesurable?
5. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est borélienne.

Exercice 5:
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit $\mathcal{F}_0$ une tribu de F.
L'image réciproque de la tribu $\mathcal{F}_0$ par f est la classe de parties de E notée $f^{-1}(\mathcal{F}_0)$ et définie par $f^{-1}(\mathcal{F}_0) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{F}_0\}$.

1. Vérifier que $f : (E, \mathcal{P}(E)) \to (F, \mathcal{F}_0)$ est mesurable.
2. Vérifier que l'image réciproque de $\mathcal{F}_0$ par f est une tribu.
3. Montrer que si $\mathcal{E}$ est une tribu rendant $f : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F}_0)$ mesurable, alors $f^{-1}(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{E}$.
4. Déterminer la tribu $f^{-1}(\mathcal{F}_0)$ dans le cas où $(F, \mathcal{F}_0) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et où f est étagée.
5. Déterminer une classe de parties de E qui engendre $f^{-1}(\mathcal{F}_0)$ dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, où $f^{-1}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}$ et où f est la fonction sinus.

Exercice 6:
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit $\mathcal{E}_0$ une tribu de E.
L'image directe de $\mathcal{E}_0$ par f est la classe des parties de F notée $f(\mathcal{E}_0)$ définie par $f(\mathcal{E}_0) = \{B \subset F, f^{-1}(B) \in \mathcal{E}_0\}$.

1. Montrer que $f : (E, \mathcal{E}_0) \to (F, \{\emptyset, F\})$ est mesurable.
2. Vérifier que l'image directe de $\mathcal{E}_0$ par f est une tribu et qu'en revanche $\{f(A), A \in \mathcal{E}_0\}$ n'est pas une tribu en général.
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une tribu rendant $f : (E, \mathcal{E}_0) \to (F, \mathcal{F})$ mesurable, alors $\mathcal{F} \subset f(\mathcal{E}_0)$.
4. Si f est une fonction constante, déterminer la tribu $f(\mathcal{E}_0)$.
5. Soient $A \in \mathcal{E}_0$ une partie de E et a et b deux éléments distincts de F. Déterminer $f(\mathcal{E}_0)$ dans la cas où f est la fonction à deux valeurs définie par $f(x) = a$ si $x \in A$ et $f(x) = b$ si $x \in A^c$
6. Faire de même en supposant maintenant que A n'est pas dans $\mathcal{E}_0$.

Exercice 7:
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{E})$.

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de E telle que $A_n \in \mathcal{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction f définie sur E par :
$$f(x) = f_n(x) \quad \text{si } x \in A_n$$
est une fonction mesurable par rapport à $\mathcal{E}$.
2. Si N est une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$, montrer que g définie sur E par
$$g(x) = f_{N(x)}(x)$$
est mesurable par rapport à $\mathcal{E}$.

Exercice 8:
Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geq 1$, muni de la tribu discrète $\mathcal{P}(E)$ et de la mesure de probabilité uniforme μ, c'est à dire telle que pour tout $x \in E$, on ait $\mu(\{x\}) = 1/n$.
Soit $\mathcal{A}$ une partition de E. L'entropie de $\mathcal{A}$ est le réel positif
$$H(\mathcal{A}) = -\sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) ln(\mu(A)).$$

1. Quelle est l'unique partition d'entropie nulle?
2. Soit A une partie de E de cardinal k telle que $0 < k < n$. Quelle est l'entropie de la partition $\{A, A^c\}$, en fonction de n et de k?
3. Montrer que si la partition $\mathcal{A}$ possède une classe A non réduite à un singleton , l'entropie de $\mathcal{A}$ n'est pas maximale. En déduire la partition de E d'entropie maximale.
4. Supposons qu'une expérience de laboratoire permette de déterminer à quelle partie $A \in \mathcal{A}$ une certaine quantité physique $x \in E$ appartient. Expliquer en une phrase pourquoi l'entropie $H(\mathcal{A})$ mesure la qualité du dispositif expérimental.

Exercice 9:
K est l'ensemble des réels x appartenant à [0,1[et dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 1. Ainsi si pour tout élément x de [0,1[, on note $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que
$$x = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}, \quad x_n \in \{0, 1, 2\}$$
on a
$$K = \{x \in [0, 1[, \forall n \geq 1, \ x_n \neq 1\}.$$
Pour $l \geq 1$, on note $A_l = \{x \in [0, 1[, \exists k \in \{1, \ldots, l\} x_k = 1\}$.

1. Rappeler pourquoi une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélienne et de mesure de Lebesgue nulle.
2. Montrer que K n'est pas dénombrable. On pourra utiliser l'application de K dans [0,1[qui à x associe le réel $\sum_1^{+\infty} y_k/2^k$ où $y_k = x_k/2$ et remarquer qu'elle est surjective.
3. Vérifier que $K = [0,1[\backslash(\cup_l A_l)$ et en déduire que K est borélien.
4. Dessiner A_1 et A_2
5. En utilisant l'additivité de la mesure de Lebesgue λ, montrer que
$$\lambda(A_l) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^l$$
6. En utilisant la $\sigma-$additivité de λ, en déduire que $\lambda(K) = 0$.
7. Montrer que la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est strictement positive et en déduire que K est d'intérieur vide.

Exercice 10:

1. La somme de deux fonctions intégrables est-elle intégrable?
2. Le carré d'une fonction intégrable est-il intégrable? Une fonction de carré intégrable est-elle intégrable.
3. La composée de deux fonctions intégrables est-elle intégrable?
4. Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives qui convergent simplement vers f. On suppose qu'il existe une constante K telle que $\int f_n.d\mu \leq K$ pour tout entier n. Montrer que
$$\int f.d\mu \leq K$$

Exercice 11:
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Déterminer la limite de
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{f(t)^2 + 1/n}}$$

Exercice 12:
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et telle que $lim_{x\to a^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $t \in]a,b[$, la fonction $x \to f(x)/\sqrt{(x-a)(t-x)}$ est intégrable sur $]a,t[$ et calculer
$$lim_{t\to a^+} \int_{]a,b[} \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}} dx$$

Exercice 13:
Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et ν un noyau sur $(X, \mathcal{A})$, c'est à dire une application
$$\nu : X \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+, \quad (x, A) \to \nu(x, A)$$
satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. pour tout $x \in X$, l'application $\nu(x,.) : A \in \mathcal{A} \to \nu(x,A)$ est une mesure
2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, la fonction $\nu(,A) : x \in X \to \nu(x,A)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{A}$.

1. Soit μ une mesure sur $\mathcal{A}$. Montrer que l'application $\mu\nu$ définie par
$$\mu\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+, \quad A \to \int (d\mu)\nu(.,A) = \int d\mu(x)\nu(x,A)$$
est une mesure
2. Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que la fonction notée νf définie par
$$\nu f : X \to \mathbb{R}^+, \quad x \to \int d(\nu(x,.))f = \int \nu(x,dy)f(y)$$
est une fonction positive mesurable par rapport à $\mathcal{A}$
3. Avec les notations précédentes, montrer qu'on a la règle d'association suivante
$$\int d(\nu\mu)f = \int d\mu(\nu f)$$
4. Montrer que si ω est un autre noyau, l'application
$$\nu\omega : X \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+, \quad (x,A) \to \int \nu(x,dy)\omega(y,A)$$
est un noyau
5. Montrer que si $\theta : X \to X$ est une application mesurable, l'application
$$\nu_\theta : X \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+, \quad (x,A) \to 1_A(\theta(x))$$
définit un noyau. Puis montrer que si $n \geq 1$, on a $(\nu_\theta)^n = \nu_{\theta^n}$ (la puissance du noyau est prise au sens de la question précédente)
6. Calculer $\lambda\nu_\theta$ en fonction de la mesure image de λ par θ lorsque $X = [0,1]$, $\mathcal{A}$ sa tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue sur [0,1].
7. Expliciter cette mesure $\lambda\nu_\theta$ dans le cas où $\theta(x) = 2x \pmod 1$
   Dans la suite, on suppose que X est un ensemble dénombrable muni de la tribu $\mathcal{P}(X)$.
   Soient $M : X^2 \to \mathbb{R}^+$ une application et ν_M l'application
$$\nu_M : X \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+, \quad (x,A) \to \sum_{y \in X} M(x,y)1_A(y)$$
8. Montrer que ν_M et un noyau et caractériser en fonction de M les noyaux ν_M tels que pour tout $x \in X$ la mesure $\nu_M(x,.)$ soit une probabilité. Dans ce cas, ν_M prend le nom de noyau de probabilité. On suppose dans la suite que tel est le cas.
9. Montrer que si μ_0 est une probabilité sur X, pour tout $n \geq 1$, la formule
$$\mu_n(\{x\}) = \mu_0(\{x_1\})M(x_1,x_2)\ldots M(x_{n-1},x_n), \; x = (x_1,\ldots,x_n) \in X^n$$
définit une probabilité sur $(X^n, \mathcal{P}(X^n))$.
10. Montrer qu'il existe au plus une unique probabilité μ sur $X^{\mathbb{Z}}$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $x_0^0, \ldots, x_n^0 \in X$, on ait
$$\mu(\{x \in X^{\mathbb{Z}}, x_p = x_0^0, \ldots, x_{p+n} = x_n^0\}) = \mu_n(x_0^0, \ldots, x_n^0).$$
    Rq: En probabilités, M s'appelle une matrice de transition, μ_0 est une probabilité initiale et les noyaux probabilistes servent à étudier les chaînes de Markov.