Feuille de travaux dirigés n°3
Espérance conditionnelle

Exercice 1:
On tire deux chiffres au hasard, indépendamment et de façon équiprobable entre 1 et 3. Soit X le maximum des chiffres obtenus et Y la somme des chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi jointe du couple (X, Y)
2. Les variables Xet Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2:
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Le résultat de ce tirage est représenté par le couple (X, Y) où X représente la couleur et Y la valeur.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 3:
Soit $Y \sim \mathcal{P}(\alpha)$ et $Z \sim \mathcal{P}(\beta)$ deux variables aléatoires de Poisson indépendantes. On s'intéresse à $X = Y + Z$.

1. Déterminer la loi de X
2. Déterminer la loi de Y sachant X
3. Calculer $\mathbb{E}[Y|X = n]$ et en déduire $\mathbb{E}[Y|X]$
4. Calculer $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$

Exercice 4:
On considère le couple (X, Y) de densité

$$f(x, y) = 2.e^{-(x+y)}1_{0 \leq x \leq y}$$

1. Déterminer les lois marginales
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$
4. Calculer $\mathbb{E}[Y|X = x]$ et en déduire $\mathbb{E}[Y|X]$
5. Calculer $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$

Exercice 5:
Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $P(X < Y)$.

Exercice 6:
Vous participez à un jeu où l'on vous propose trois portes au choix. L'une des porte cache une voiture à gagner alors que derrière les deux autres se trouve une chèvre.
Vous choisissez une porte, mais sans l'ouvrir.
L'animateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre une porte, porte derrière laquelle se trouve une chèvre. Il vous donne alors la possibilité de conserver votre choix ou de changer de porte. Qu'avez-vous intérêt à faire?

Exercice 7:
Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 1000.
Un responsable d'un laboratoire pharmaceutique vient vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Néanmoins, sur une personne non malade, le test est positif à 0.2%.

1. Calculer la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque le test est positif.
2. Qu'en dîtes-vous?

Exercice 8:
Un gardien de nuit à 10 clés, dont une seule qui fonctionne pour ouvrir une porte. Il emploie deux méthodes :

- Méthode A: à jeun, il retire du trousseau les clés déjà essayées
- Méthode B: ivre, il remet la clé dans le trousseau après chaque essai

1. Méthode A: on appelle p_n la probabilité qu'il faille n essais pour ouvrir la porte. Calculer p_n
2. Méthode B: on appelle q_n la probabilité qu'il faille n essais pour ouvrir la porte. Calculer q_n
3. Le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre?

Exercice 9:

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$. Montrer que
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ P(X > n+m | X > m) = P(X > n)$$
2. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que
$$\forall t \geq 0,\ \forall s \geq 0,\ P(X > t+s | X > t) = P(X > s)$$
3. La durée de vie T en années d'une télévision suit une loi exponentielle de moyenne 8 ans. Vous possédez une télévision depuis 2 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore d'au-moins 8 années à partir de maintenant.

Exercice 10:
Un message doit être transmis d'un point à un autre à travers N canaux successifs. Ce message peut prendre deux valeurs 0 ou 1. Lors du passage par un canal, le message a une probabilité p d'être bruité, autrement dit d'être transformé en son contraire. On suppose que les canaux se comportent de façon indépendante.

1. On note I_n l'événement "en sortie du n-ième canal, le message est le même que celui initial". Exprimer $P(I_{n+1})$ en fonction de $P(I_n)$ et de p
2. On pose $p_n = P(I_n)$. Donner une formule de récurrence entre p_{n+1} et p_n. Que vaut p_1?
3. On considère une suite u_n vérifiant $u_{n+1} = (1-2p)u_n+p$. On pose $v_n = u_n - 1/2$. Montrer que v_n est une suite géométrique. En déduire v_n en fonction de p et v_1.
4. En déduire p_n en fonction de p
5. Que vaut la limite de p? La limite est-elle surprenante?

Exercice 11:
On lance un dé équilibré et une pièce de monnaie non biaisé un nombre de fois égal au résultat du dé. Soit X le résultat du dé et Y le nombre de Pile obtenus par la pièce de monnaie.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y)
2. Quelle est la loi de Y sachant $X = n$ pour $nn\{1, \dots, 6\}$?
3. En déduire $\mathbb{E}[Y|X = n]$ puis $\mathbb{E}[Y|X]$
4. En déduire $\mathbb{E}[Y]$

Exercice 12:
On tire deux variables U et V de façon indépendantes, de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. On pose $X = min(U, V)$ et $Y = max(U, V)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, Y)
2. Calculer $\mathbb{E}[U|Y = n]$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. En déduire $\mathbb{E}[U|Y]$
4. Déterminer $\mathbb{E}[Y|U]$
5. Faire de même avec $\mathbb{E}[U|X]$ et $\mathbb{E}[X|U]$

Exercice 13:
On tire de façon uniforme des points de l'ensemble $\{(i, j), i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, j \in \{1, \dots, i\}\}$. Ceci nous donne un couple (X, Y)

1. Quelle est la loi de (X, Y)?
2. Déterminer les lois marginales
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = j$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
4. Calculer $\mathbb{E}[X|Y = j]$, puis en déduire $\mathbb{E}[X|Y]$ puis $\mathbb{E}[X]$ en fonction de $\mathbb{E}[Y]$
5. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
6. Calculer $\mathbb{E}[Y|X = i]$, puis en déduire $\mathbb{E}[Y|X]$ puis $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de $\mathbb{E}[X]$

7. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$

Exercice 14:
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires admettant la même espérance m. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. On suppose que $N \sim \mathcal{G}(1/2)$ et les X_n sont équiprobables sur $\{1,2,3,4,5,6\}$. Comment simuler S_N à l'aide d'un dé et d'une pièce de monnaie?
2. Déterminer $\mathbb{E}[S_N|N=n]$ et en déduire $\mathbb{E}[S_N|N]$
3. Que vaut $\mathbb{E}[S_N]$?
4. Le nombre de clients se rendant dans un magasin donné en l'espace d'une journée est une variable aléatoire de moyenne 50. La somme dépensée par chacun des clients est aussi une variable aléatoire mais de moyenne 20 euros. Avec des hypothèses raisonnables, quel est le chiffre d'affaires quotidien moyen du magasin?

Exercice 15:
Soit une urne contenant N boules noires et M boules blanches. On pose $p = \frac{N}{N+M}$. On effectue une suite de tirages avec remise et on désigne par T le nombre de tirages successifs pour obtenir la première boule noire.

1. Quelle est la loi de T?
2. Soit X la variable qui prend la valeur 0 ou 1 selon que la première boule tirée est blanche ou noire
   (a) Déterminer $\mathbb{E}[T|X=1]$
   (b) $\mathbb{E}[T|X=0]$ en fonction de $\mathbb{E}[T]$
   (c) En déduire $\mathbb{E}[T]$

Exercice 16:
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de sorte que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X=i) = \frac{2}{3^i}$$

Soit Y une variable aléatoire de sorte que, sachant $X=i$ la loi de Y est équiprobable sur $\{i, i+1\}$.

1. Que vaut $\mathbb{E}[X]$?
2. Déterminer pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}[Y|X=i]$. En déduire $\mathbb{E}[Y|X]$ puis $\mathbb{E}[Y]$
3. Déterminer la loi du couple (X,Y)
4. Déterminer la loi de Y
5. Déterminer pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}[X|Y=j]$. En déduire $\mathbb{E}[X|Y]$
6. Calculer $cov(X,Y)$

Exercice 17:
Soit un couple (X,Y) de densité

$$f(x,y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}-y} 1_{]0,+\infty[^2}(x,y)$$

1. Déterminer la densité marginale de Y
2. En déduire la densité conditionnelle $f(x|y)$
3. Que vaut $\mathbb{E}[X|Y=y]$. En déduire l'espérance conditionnelle de X sachant Y
4. On considère cette fois $f(x,y) = \frac{12}{5} x(2-x-y) 1_{]0,1[^2}(x,y)$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{5-4Y}{8-6Y}$$

Exercice 18:
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de même paramètre λ.

1. Déterminer la densité $f_{X,Y}$ du couple (X,Y)
2. Déterminer la densité $f_{V,W}$ du couple (V,W) défini par

$$\begin{cases} V = X+Y \\ W = X \end{cases}$$

3. En déduire la densité de V
4. Calculer $f(w|v)$

Exercice 19:

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre respectif λ_1 et λ_2. Soit $Y = min(X_1, X_2)$. Montrer que $P(Y = X_1) = P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$
2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier (respectivement au second) guichet suit une loi exponentielle de moyenne 20 (respectivement 30) minutes. Léa et Nathan sont convoqués à la banque. Léa choisit le guichet 1 et Nathan le 2. Quelle est la probabilité que Léa sorte e premier?
3. En moyenne combien de temps faut-il pour que les deux soient sortis?

Exercice 20:
Soit les tailles et poids de 10 enfants de 6 ans :

taille	121	123	108	118	111	109	114	103	110	115
poids	25	22	19	24	19	18	20	15	20	21

1. Calculer les espérances, variances et covariances empiriques pour cet échantillon
2. Déterminer la droite de régression $y = \hat{a}x + \hat{b}$

3. Que vaut l'erreur quadratique moyenne pour cet échantillon?

Exercice 21:
Soit (X, Y) le couple de densité :

$$f(x,y) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{y^2}{x^2} - 2y + x^2 + 2x)} 1_{x>0}$$

1. Montrer que $X \sim \mathcal{E}(1)$
2. Calculer $f(y|x)$. Que remarquez-vous?
3. En déduire la courbe de régression $x \to \mathbb{E}[Y|X = x]$
4. Sachant $X = x$, donner une zone de confiance à 95% pour Y
5. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X
6. Représenter graphiquement les résultats.