Feuille de travaux dirigés n°2
Tribus, mesures, applications mesurables et intégration

Exercice 1:

$$\begin{aligned} P(X<3) &= P(X=-1)+P(X=0) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X>2) &= P(X=4)+P(X=5) \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= -1.P(X=-1)+0.P(X=0)+4.P(X=4)+5.P(X=5) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Exercice 4:

1. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes, X et Y sont indépendantes si et seulement si
$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ P(X=x, Y=y) = P(X=x).P(Y=y)$$
2. $X+Y \sim \mathcal{B}(n+n', p)$
   En effet :
   (a) $X = X_1 + \ldots + X_n$ avec X_i des variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes

   (b) $Y = Y_1 + \ldots + Y_{n'}$ avec Y_i des variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes

   Donc comme X et Y sont indépendantes, $X+Y$ s'écrit comme la somme de $n+n'$ variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \textstyle\sum_{l=0}^{k} P(X=l, X+Y=k) \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{k} P(X=l, Y=k-l) \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{k} P(X=l).P(Y=k-l) \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\textstyle\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!.(k-l)!}\lambda^k\mu^{k-l} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k \end{aligned}$$

Donc $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 5:

1. Une fonction de densité est une fonction positive et d'intégrale 1.

   - Positivité : ok
   - Calculons l'intégrale :

   $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t.e^{-t}dt &= [-te^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt \\ &= [-e^{-t}]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Donc il s'agit bien d'une fonction de densité.
2. Calcul des probabilités :

   $$\begin{aligned}P(T > 2) &= \int_2^{+\infty} t.e^{-t}dt \\ &= [-te^{-t}]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} e^{-t}.dt \\ &= 2.e^{-2} + [-e^{-t}]_2^{+\infty} \\ &= 2.e^{-2} + e^{-2}\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}P(1 < T < 3) &= \int_1^{3} t.e^{-t}dt \\ &= [-te^{-t}]_1^{3} + \int_1^{3} e^{-t}.dt \\ &= e^{-1} - 3.e^{-3} + [-e^{-t}]_1^{3} \\ &= e^{-1} - 3.e^{-3} + e^{-1} - e^{-3}\end{aligned}$$

3. Calcul de l'espérance :

   $$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} t^2.e^{-t}dt$$

   Intégration par parties pour effectuer le calcul.

Exercice 6:

1. Calcul de l'espérance et de la variance :

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[M] &= \mathbb{E}[\tfrac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \\ &= \tfrac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]) \\ &= \tfrac{1}{n}(\mu + \ldots + \mu) \\ &= \mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[M] &= \mathbb{V}[\tfrac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n) \\ &= \tfrac{1}{n^2}(\mathbb{V}[X_1]+\ldots+\mathbb{E}[X_n]) \quad \text{car indépendance} \\ &= \tfrac{1}{n^2}(\sigma^2+\ldots+\sigma^2) \\ &= \tfrac{\sigma}{n}\end{aligned}$$

2. Loi de M : $M \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
3. valeur de n?

$$P(\mu-1 \leq M \leq \mu+1) = P(-1 \leq M-\mu \leq 1)$$

Or d'après l'inégalité de Markov, on sait que :

$$P(|X-\mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

Donc il suffit de prendre :

$$\frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2} < 0.01$$

avec $\varepsilon = 1$.
On trouve $n \geq 625$. Donc 625 parcelles sont nécessaires.

Exercice 7:
Soit A_1 l'événement : on tire une boule noire dans U_1 et une boule noire dans U_2
Soit A_2 l'événement : on tire une boule noire dans U_1 et une boule rouge dans U_2
Soit A_3 l'événement : on tire une boule rouge dans U_1 et une boule noire dans U_2
Soit A_4 l'événement : on tire une boule rouge dans U_1 et une boule rouge dans U_2
Soit A l'événement on tire une boule noire dans U_3.
D'après l'énoncé, on en déduit que :

- $P(A_1) = \frac{2}{5}.\frac{1}{5} = \frac{2}{25}$
- $P(A_2) = \frac{2}{5}.\frac{4}{5} = \frac{8}{25}$
- $P(A_3) = \frac{3}{5}.\frac{1}{5} = \frac{3}{25}$
- $P(A_4) = \frac{3}{5}.\frac{4}{5} = \frac{12}{25}$
- $P(A|A_1) = \frac{5}{9}$
- $P(A|A_2) = \frac{4}{9}$
- $P(A|A_3) = \frac{4}{9}$
- $P(A|A_4) = \frac{3}{9}$

On veut calculer $P(A_3|A) + P(A_4|A)$.
Or $P(A_3|A) = \frac{P(A|A_3).P(A_3)}{P(A)}$, $P(A_4|A) = \frac{P(A|A_4).P(A_4)}{P(A)}$ et $P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(A|A_i).P(A_i)$.
D'où $P(A_3|A) = \frac{2}{15}$ et $P(A_4|A) = \frac{2}{5}$.
Donc $P(U_1$ rouge sachant $A) = \frac{8}{15}$.

Exercice 10:

1. Convergence en proba :
   Soit $\varepsilon > 0$,
$$P(|Y_n| > \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \geq n \\ P(X \in [0, 1/n]) = 1/n & \text{si } \varepsilon < n \end{cases}$$
   Donc $P(|Y_n| > \varepsilon) \to 0$.
   Donc il y a convergence en probabilité vers 0.

2. Convergence L^1
   On a $\mathbb{E}[Y_n] = n.P(Y_n = n) = 1$. Donc il n'y a pas convergence dans L^1.

3. Convergence presque sûre
   Si Y_n converge presque sûrement, cela serait vers 0 car la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité et on a vu la convergence en probabilité vers 0.
   Supposons donc la convergence presque sûre vers 0 de Y_n.
   Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \neq 0$, alors $Y_n(\omega) \to 0$.
   Or $P(X \neq 0) = 1$.
   Donc on a bien la convergence presque sûre vers 0, puisque $lim Y_n = 0$ sur l'espace de probabilité 1 qu'est $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \neq 0\}$.

Exercice 11:
Calcul des différentes limites :

1. $I_n = \int_{[0;1]^n} f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) dx_1.\ldots.dx_n$
   $I_n = \mathbb{E}[f(\frac{U_1+...+U_n}{n})]$ avec $U_1, \ldots, U_n$ des variables idd de loi $\mathcal{U}([0;1])$.
   Or d'après la loi des grands nombres, on sait que $\frac{U_1+...+U_n}{n} \to 1/2$ avec une convergence presque sûre et donc en loi.
   Or une des caractérisations de la convergence en loi permet de dire que
$$lim I_n = f(1/2)$$

2. $J_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} f(k/n)$
   $J_n = \mathbb{E}[f(\frac{B_1+...+B_n}{n})]$ avec $B_1, \ldots, B_n$ des variables idd de loi de Bernoulli de paramètre p.
   Or d'après la loi des grands nombres, on sait que $\frac{B_1+...+B_n}{n} \to p$ avec une convergence presque sûre et donc en loi.
   Or une des caractérisations de la convergence en loi permet de dire que
$$lim J_n = f(p)$$

3. $J_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda.n} \frac{(\lambda.n)^k}{k!} f(k/n)$
   $K_n = \mathbb{E}[f(\frac{P_1+...+P_n}{n})]$ avec $P_1, \ldots, P_n$ des variables idd de loi de Poisson de paramètre λ.
   Or d'après la loi des grands nombres, on sait que $\frac{P_1+...+P_n}{n} \to \lambda$ avec une convergence presque sûre et donc en loi, puisqu'une somme de variables aléatoires de Poisson indépendantes est encore une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres.
   Or une des caractérisations de la convergence en loi permet de dire que
$$lim K_n = f(\lambda)$$