1° Cours

Si l'on regarde les cours de probabilités que vous avez pu suivre jusqu'à présent, ils se sont essentiellement concentrés sur l'étude d'une variable aléatoire avec sa loi, son espérance, sa variance, ou plus généralement sur l'étude d'un couple ou vecteur aléatoire.

Vous avez aussi étudié le comportement de suites formées à partir de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. C'est ainsi que vous avez découvert la loi des grands nombres et le théorème central limite notamment.

Ce cours-ci va s'intéresser aux processus stochastiques. Mais me direz-vous qu'est ce qu'un processus stochastique ?

Tout simplement, que nous allons considérer des familles de variables aléatoires indexées par un paramètre discret ou continu représentant le temps.

La loi d'un processus $(X_t)_{t\in I}$ sera donnée par la loi de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t_i \in I$.

Cependant avant de pouvoir étudier de tels objets, nous allons rappeler quelques résultats et appréhender de nouvelles notions probabilistes à l'image des tribus, des applications mesurables et de l'espérance conditionnelle.

Chapitre I Quelques rappels

1°) Le lemme de Borel-Cantelli

On considère une suite d'évènements $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ de l'espace Ω.

Soit la suite des évènements $\left\{ \bigcup_{k \geq n} A_k \right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est décroissante et notons son intersection $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k := \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Rq : A représente l'ensemble des aléas ω qui appartiennent à une infinité d'évènements A_n.

Lemme de Borel Cantelli :

. Si $\sum P(A_n)$ converge, alors $P(A) = 0$

. Si les événements A_n sont indépendants et si $\sum P(A_n)$ diverge alors $P(A) = 1$

preuve :

. Soit $\varepsilon > 0$, si $\sum P(A_n)$ converge, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n \geq N} P(A_n) < \varepsilon$

Mais alors $P\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right) < \varepsilon$ et puisque $A \subset \bigcup_{n \geq N} A_n$, on en déduit

que $P(A) < \varepsilon$

. $$P\left(\bigcup_{j=k}^{m} A_j\right) = 1 - P\left(\left(\bigcup_{j=k}^{m} A_j\right)^c\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{j=k}^{m} A_j^c\right)$$

$$= 1 - \prod_{j=k}^{m} P(A_j^c)$$

$$\geq 1 - \exp\left(-\sum_{j=k}^{m} P(A_j)\right)$$

On fait tendre m vers ∞

$$P\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{j=k}^{\infty} P(A_j)\right) = 1$$

Puisque les événements $\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$ décroissent, $\Rightarrow A$, on en déduit que $P(A) \geq 1$

2°) Divers modes de convergence

Convergence presque sûre :

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X ($X_n \xrightarrow[ps]{} X$) si : $\exists \Lambda$ événement tel que $P(\Lambda)=1$ tel que

$$\forall \omega \in \Lambda, \quad X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)$$

Convergence en probabilité

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X si : $\forall \varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Rq : les résultats usuels sur les limites, comme l'unicité de la limite, la linéarité demeurent valides dans ces deux convergences

Proposition : Si $X_n \xrightarrow[ps]{} X$ alors $X_n \xrightarrow[P]{} X$

Preuve : Soit Λ l'événement de probabilité 1 tel que $\forall \omega \in \Lambda$, $X_n(\omega) \to X(\omega)$.

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\Lambda_n = \{\omega \in \Lambda \text{ tq } \sup_{k\geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

La suite (Λ_n) est décroissante et $\bigcap \Lambda_n = \emptyset$

Donc $\lim P(\Lambda_n) = 0$

Par ailleurs $\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset \Lambda_n \cup \Lambda^c$

donc $P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(\Lambda_n)$

d'où $\lim P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

Rq : La réciproque est fausse !

Soit $\Omega = [1, 2]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note k l'unique entier tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$

On pose $X_n(t) = 1\!\!1_{[n 2^{-k}, (n+1) 2^{-k}]}(t)$

Soit $\varepsilon > 0$, $P(|X_n| > \varepsilon) = 2^{-k} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

donc $X_n \xrightarrow[P]{} 0$

Cependant, soit $t \in [1, 2]$, il existe une infinité de n tel que

$X_n(t) = 1$

donc $X_n \not\xrightarrow[ps]{} 0$

Proposition : Si $X_n \xrightarrow[P]{} X$ alors il existe une suite extraite $X_{\varphi(n)}$ telle que

$$X_{\varphi(n)} \xrightarrow[ps]{} X$$

Preuve : $\forall n \geq 1$, $P(|X_k - X| > 1/n) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

donc il existe $\varphi(n)$ entier tq $P(|X_{\varphi(n)} - X| > 1/n) < 2^{-n}$

et ainsi, on a $\sum_{n \geq 1} P(|X_{\varphi(n)} - X| > 1/n)$ qui converge

De ce fait, d'après le lemme de Borel Cantelli

$$P\Big(\underbrace{\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \{|X_{\varphi(k)} - X| > 1/n\}}_{= \Lambda}\Big) = 0$$

donc $P(\Lambda^c) = 1$

Soit $\forall \omega \in \Lambda^c$, $\exists k(\omega)$ entier tq $\forall n \geq k(\omega)$

$|X_{\varphi(n)}(\omega) - X(\omega)| < 1/n$

$\Rightarrow X_{\varphi(n)}(\omega) \to X(\omega)$

Convergence dans L^p

Pour tout $p \geq 1$, on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(\Omega, \mathbb{P})$ vers une variable aléatoire X ($X_n \xrightarrow[L^p]{} X$) si

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Proposition

Si $X_n \xrightarrow[L^p]{} X$ alors $X_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{} X$

Si $X_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{} X$ et si il existe Y variable aléatoire dans L^p telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|X_n| \leq Y$ alors $X_n \xrightarrow[L^p]{} X$

Convergence en Loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles de fonction de répartition F_{X_n}

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X si en tout point de continuité x de F_X, $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x)$

Rq autre définition

$(X_n) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} X$ si pour toute fonction f continue bornée

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

3°) Théorèmes Classiques

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Loi des Grands Nombres

- Si $X_1 \in L^1$ et $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ alors $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[ps]{} \mu$

Si $\mathbb{E}[|X_1|] = \infty$, alors $\overline{X}_n$ diverge ps

Applications

. La loi des grands nombres justifie l'interprétation fréquentielle de la notion de probabilité

On réalise un grand nombre d'expériences dans des conditions identiques, dont le résultat dépend de l'aléa.
Par exemple, on veut savoir si la durée de vie d'une ampoule est supérieure à 1000 heures.
On note $X_n = 1$ si la n^o expérience est réussie et $X_n = 0$ sinon

$\rightarrow$ suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de moyenne $P(X_1 = 1)$

La fréquence de succès $\overline{X}_n \xrightarrow[P]{} P(X_1 = 1)$

. Calcul d'intégrales

On veut calculer $I = \int_{x \in \mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) \, dx$ avec $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ est la densité d'une variable au $\mathbb{R}^d$ X et $\varphi \in L^1$

on remarque que $I = E[\varphi(X)]$

Si on sait simuler $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi que X, alors

$$I \approx I_n = \frac{\varphi(X_1) + \dots + \varphi(X_n)}{n}$$

(Méthode de Monte Carlo)

Théorème Central limite

Soit $X_1, \dots, X_n$ iid L^2 avec $\mu = E[X_1]$ et $\sigma^2 = V[X_1]$.

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{avec} \quad S_n = X_1 + \dots + X_n$$