Chapitre Probabilités et Dénombrement

I Introduction :

Quand on parle de probabilité, il faut avoir une expérience aléatoire, à savoir une étude dont on ne connait pas avec certitude le résultat.
On définit alors l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire, l'univers étant l'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Il est alors possible de définir une probabilité, à savoir une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ qui satisfait deux axiomes.
Plus précisément, une probabilité est une application

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$A \longrightarrow P(A) \in [0;1]$$

telle que:
- $P(\Omega) = 1$
- si $A \cap B = \emptyset$ (ce qui signifie que A et B sont disjoints ou incompatibles)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

La question est comment définir une telle probabilité étant connu Ω.
Il y a certains cas où il va être possible de recourir à du dénombrement. C'est le cas d'équiprobabilité.

On parle d'équiprobabilité si, notant $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, on a :
$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

dans ce cadre, on a :

pour toute partie A de Ω, encore appelé <u>évènement</u>, on a :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

où Card(A) désigne le <u>cardinal</u> de A, autrement dit le nombre d'éléments dans l'ensemble A.

Il est donc nécessaire de pouvoir compter le nombre d'éléments dans un ensemble. C'est ce que l'on appelle <u>dénombrer</u>.

I Dénombrement

1) Notations

- Soit E un ensemble. On note le cardinal de E Card(E) ou $|E|$. Le cardinal désigne le nombre d'éléments de E.

- $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.

Ex : si $E = \{1 ; 2 ; 3\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}, \{1;2;3\} \}$$

Soit A, B deux parties de E

- $A \cap B$ désigne l'intersection de A et B. C'est l'ensemble des éléments de E qui sont à la fois dans A et dans B.
- $A \cup B$ désigne l'union de A et B. C'est l'ensemble des

éléments de E qui sont dans A ou dans B.

- $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E. C'est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.
- $A - B$ désigne A privé de B. C'est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.
- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ désigne la différence symétrique de A et B.

Ex : $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
$A = \{0 ; 1 ; 2\}$
$B = \{2 ; 3 ; 4\}$

Alors :

$A \cap B = \{2\}$
$A \cup B = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$
$\bar{A} = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
$A - B = \{0 ; 1\}$
$A \Delta B = \{0 ; 1 ; 3 ; 4\}$

- On appelle ensemble produit ou ensemble cartésien de A par B, l'ensemble :

$$A \times B = \{(x, y) \text{ avec } x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Ex : si $A = \{0 ; 1 ; 2\}$ et $B = \{a, b\}$
$A \times B = \{(0,a), (0,b), (1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$

- Soit n un entier non nul et positif, ce que l'on note $n \in \mathbb{N}^*$.
On note factorielle n, la quantité $n!$ définie par :

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

Par convention, $0! = 1$.

2) Dénombrement

a) Ensemble produit

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

On a $\quad \text{Card}(E \times F) = (\text{Card } E) \times (\text{Card } F) = n \times p$

b) Nombre d'applications de E dans F.

Le nombre d'applications de E dans F est :

$$(\text{Card } F)^{(\text{Card } E)} = p^n$$

c) Parties d'un ensemble

- Soit E un ensemble de cardinal n.
  Alors :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

- Soit A, B deux parties de E, on a :
  - $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
  - $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

d) Arrangements

Soit E un ensemble de cardinal n.
Soit p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.
On appelle <u>arrangement</u> d'ordre p des éléments de E, un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ où les x_i sont des éléments distincts de E.

Rq : attention : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$: c'est un vecteur et donc l'ordre dans lequel on écrit les éléments
$\{x_1, \dots, x_p\}$: c'est une liste donc aucun ordre.

Exemple :

$\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ une unique possibilité de listi

$(1,2,3,4)$; $(1,2,4,3)$; $(1,3,2,4)$; $(1,3,4,2)$
$(1,4,2,3)$; $(1,4,3,2)$; $(2,1,3,4)$; $(2,1,4,3)$;
$(2,3,1,4)$; $(2,3,4,1)$; $(2,4,1,3)$; $(2,4,3,1)$;
$(3,1,2,4)$; $(3,1,4,2)$; $(3,2,1,4)$; $(3,2,4,1)$;
$(3,4,1,2)$; $(3,4,2,1)$; $(4,1,2,3)$; $(4,1,3,2)$;
$(4,2,1,3)$; $(4,2,3,1)$; $(4,3,1,2)$; $(4,3,2,1)$

Tous ces vecteurs sont différents !

Le nombre d'arrangement d'ordre p est A_n^p avec :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

Rq : $A_n^0 = 1$ et $A_n^n = n!$

c) Permutations

On appelle permutation d'un ensemble E de cardinal n, un arrangement d'ordre n de E.
Le nombre de permutation de E est $n!$

Rq : Quand on parle à la base de permutation, on considère des ensembles E avec des éléments distincts.

Et si il y a des répétitions ?
Par exemple, quel est le nombre d'anagrammes du mot FINI ?

Soit E une famille de cardinal n défini par :

$E = \{a_1, \dots, a_k\}$ avec a_i qui se répète r_i fois

et $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

le nombre de permutations de E est alors :

$$\frac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$$

f) Combinaisons

Soit E un ensemble comprenant n éléments distincts.

Soit p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

On appelle combinaison d'ordre p de E toute partie de E à p éléments, les éléments étant distincts.

le nombre de combinaisons d'ordre p de E est C_n^p défini par :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \quad : \text{coefficient binomial}$$

propriétés :

- $C_n^p = C_n^{n-p}$ pour $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant p \leqslant n$
- $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant n$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k\, y^{n-k}$ pour $n \geqslant 0$

Et si on autorisait les éléments à ne pas être tous différents ?

On appelle combinaison d'ordre p, avec répétition possible des éléments de E, une liste de p éléments de E, les répétitions étant autorisées mais l'ordre dans la liste n'intervient pas.

Le nombre de combinaisons avec répétition est Γ_n^p défini par :

$$\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$$

II Probabilité

1) Vocabulaire

. Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne connait pas le résultat avec certitude.

. L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Si on note $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors :

- une partie de Ω est appelée événement
- $\{\omega_i\}$ est un événement élémentaire

Quelques propriétés de $\mathcal{P}(\Omega)$.

- $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$. Ω est l'événement certain
- si $A \in \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$
  en particulier $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$. $\emptyset$ est l'événement impossible
- si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $A \cap B \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

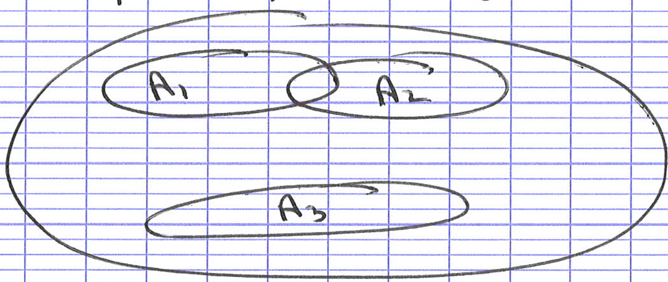
Rq :

- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $A \cap B = \emptyset$.
  les évènements A et B sont dits incompatibles.

- Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système d'évènements.
  On dit que les évènements A_i sont dits globalement incompatibles si $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$.

(!) On dit que les évènements A_i sont deux à deux incompatibles si pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

2 à 2 incompatibles $\Rightarrow$ globalement incompatibles
la réciproque est fausse en général.



globalement ~~indépendants~~ mais pas 2 à 2 incompatibles.

2) Probabilité

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est Ω.
Soit une application P définie par :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$$
$$A \to \cancel{p(A} \; P(A) \in [0,1]$$

P est une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$
- si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Rq : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est alors un espace probabilisé.

propriétés :

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
- $A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Rq :

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

- soit $(A_i)_{i \in I}$ un système d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

3) Ensembles probabilisés

1° cas : si Ω est fini

Soit Ω de cardinal n. On note alors $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.
On définit alors une probabilité en donnant

$$p_i = P(\{\omega_i\}) \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

On a alors pour toute partie A de Ω :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$$

On dit qu'on a équiprobabilité si :

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

On a alors pour tout événement A,

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

2° cas : Ω est un ensemble dénombrable infini

Rq : On dit que Ω est dénombrable infini s'il existe une bijection de Ω dans $\mathbb{N}^*$.

On a alors $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$
On définit une probabilité sur Ω par la donnée de $P(\{\omega_i\}) \geq 0$ avec $\sum_{i \in I} P(\{\omega_i\}) = 1$.

4) Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
Soit l'application :

$$P_A : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$B \longrightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

Ainsi définie, P_A est une probabilité. Il s'agit de la probabilité conditionnelle sachant A.

Rq : on a alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

5) Indépendance en probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
On dit que A et B sont deux événements indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Rq : cela signifie concrètement que A n'influe pas sur B et réciproquement.

6) Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Soit $B_1, \dots, B_n$ un système complet d'événements deux à deux incompatibles. Cela signifie que $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ et pour tout $i \neq j$ $B_i \cap B_j = \emptyset$.

C'est également ce que l'on appelle une partition de Ω.

Formule des probabilités totales :

Soit A un événement, alors : ~~P(A) ≠ 0~~

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) \times p(A \mid B_i).$$

Formule de Bayes :

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \times P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A \mid B_j)}$$