Chapitre 2 : Tribus et Applications mesurables

I) Rappel sur les ensembles

On considère deux ensembles A et B de l'espace E

intersection : $A \cap B$ ensemble de points appartenant à la fois à A et B

union : $A \cup B$ ——— à au moins l'un de ces deux ensembles

complémentaire A^c : ensemble des points de E qui n'appartiennent pas à A.

différence symétrique : $A \Delta B$ ensemble des points appartenant à l'un des deux ensembles mais pas les deux

$$A \Delta B = A_{\setminus A\cap B} \cup B_{\setminus A \cap B}$$

ensemble vide $\emptyset$: ensemble ne contenant aucun point

ensembles disjoints : si $A \cap B = \emptyset$

L'union et l'intersection sont des opérations commutatives et associatives

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{et} \quad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{et} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Si l'on a une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$

- $\bigcup_{i\in I} A_i$: ensemble des points appartenant à au moins l'un des A_i
- $\bigcap_{i\in I} A_i$: ensemble des points appartenant à tous les A_i.

II) Théorie de la mesure et théorie de l'intégration

La notion de mesure va étendre la notion usuelle de longueur pour les ensembles de $\mathbb{R}$, ou de volume pour ceux de $\mathbb{R}^d$, et ceci de deux manières :

1) pouvoir considérer des espaces plus généraux
2) regrouper dans un même cadre mathématique longueur, surface, volume, masse, charge ponctuelle

Exemple dans $\mathbb{R}^3$: on considère un corps matériel de densité $\rho(x)$ et de charge électrique $\varepsilon(x)$.

Pour une partie A de $\mathbb{R}^3$, on peut définir son volume $V(A)$, sa masse $M(A) = \int \rho(x)\,dx$

sa charge électrique $E(A) = \int_A \mathcal{E}(x)\,dx$

Ces trois quantités possèdent des propriétés physiques très différentes. Cependant, elles partagent la propriété mathématique suivante :

(A) Additivité pour A et B disjoints $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

$\Rightarrow$ tout A de $\mathbb{R}^3$ a sa "mesure" $\mu(A)$ et la propriété (A) est satisfaite

Rq : si on remplace $\mathbb{R}^3$ par un ensemble E quelconque

↳ contenu intuitif essentiel de la mesure

Mais, en réalité, la notion de mesure est bien plus complexe ! Pourquoi

1) Il faut des propriétés sur les parties A

2) La propriété d'additivité ne suffit pas

1) Classe des ensembles mesurables

Soit E un ensemble quelconque. On ne peut pas définir la mesure de n'importe quelle partie de E $\Rightarrow$ il faut définir la classe des parties de E dont on pourra définir la mesure

définition : algèbre

Une classe $\mathcal{E}$ de parties de E est appelée algèbre si :

- $E \in \mathcal{E}$
- si $A \in \mathcal{E}$ alors $A^c \in \mathcal{E}$ (stabilité par passage au complémentaire)
- si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $A \cup B \in \mathcal{E}$ (stabilité par union)

Rq : on a immédiatement, si $\mathcal{E}$ est une algèbre

- $\emptyset \in \mathcal{E}$
- si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{E}$ (stabilité par union finie)
- si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{E}$ (stabilité par intersection finie)

Rq : Soit E un ensemble

Il existe beaucoup d'algèbres sur E

- la plus grosse $\mathcal{P}(E)$
- la plus petite $\{\emptyset, E\}$
- soit $A \in E$, la plus petite algèbre contenant A est $\{\emptyset, A, A^c, E\}$

<u>définition</u> : Tribu

Une classe $\mathcal{E}$ de E est appelée tribu ou σ-algèbre si :

- $E \in \mathcal{E}$
- si $A \subset \mathcal{E}$ alors $A^c \in \mathcal{E}$
- si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{E}$ (stabilité par union dénombrable)

<u>Rq</u> : un élément de la tribu E s'appelle un ensemble mesurable

le couple $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable

. toute tribu est une algèbre mais la réciproque est fausse

<u>Ex</u> : Soit E un ensemble

- la plus grosse tribu est $\mathcal{P}(E)$
- la plus petite tribu est $\{\emptyset, E\}$
- l'intersection d'une famille quelconque de tribu est encore une tribu

<u>définition</u>

La tribu engendrée par une classe de parties $\mathcal{A}$ de E est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$ (= l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$).

On la note $\sigma(\mathcal{A})$.

<u>Ex</u> : Si $\mathcal{A} = \{A\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une partition de E et $\mathcal{A} = \{E_i, i \in I\}$

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\bigcup_{j \in J} E_j \text{ avec } J \subset I\}$$

<u>Rq</u> : on peut avoir $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$ mais $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$ ex : $\sigma(\{A\}) = \sigma(\{A^c\})$

2) Opérations sur les ensembles

définition

On dit qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de parties de E converge vers A ($A_n \to A$)

si :

$\forall x \in A$, $x \in A_n$ pour n assez grand ($\forall x \in A, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, x \in A_n$)

Rq : Cette définition est équivalente à dire que $1_{A_n}(x) \longrightarrow 1_A(x)$

prop : Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, alors elle converge vers $A = \bigcup A_n$

Si ———— décroissante, ———— $A = \bigcap A_n$

Il existe des cas où les suites ne convergent pas.

définition Soit (A_n) une suite de parties de E

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geq n} A_m$$

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geq n} A_m$$

Rq

$x \in \limsup A_n \Leftrightarrow x$ appartient à A_n pour une infinité d'indices n

$x \in \liminf A_n \Leftrightarrow x$ appartient à A_n pour tout n sauf au plus un nombre fini

Dire que A_n converge revient à dire que $\limsup A_n = \liminf A_n$

prop . $\limsup_n A_n = \left(\liminf_n A_n^c\right)^c$

. $\liminf_n A_n = \left(\limsup A_n^c\right)^c$

. Soit $\mathcal{E}$ une tribu

$A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow \liminf_n A_n \in \mathcal{E}$ et $\limsup A_n \in \mathcal{E}$

$A_n \in \mathcal{E}$ et $A_n \xrightarrow[n]{} A \Rightarrow A \in \mathcal{E}$

3) La tribu Borélienne de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^d$

définition : La tribu Borélienne de $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par la classe des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Un élément de cette tribu est appelé Borélien.

prop :

. Tout intervalle ouvert, fermé ou semi ouvert appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Il en est de même de toute réunion finie ou dénombrable d'intervalles.

. La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi la tribu engendrée par l'une des classes suivantes d'ensembles.

(i) $\mathcal{J} = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R} \}$

(ii) $\mathcal{J}' = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{Q} \}$

(iii) $\mathcal{K} = \{]-\infty, x[, x \in \mathbb{R} \}$

(iv) $\mathcal{K}' = \{]-\infty, x[, x \in \mathbb{Q} \}$

prop : Tout ouvert non vide A de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts et aussi réunion dénombrable d'intervalles fermés.

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par la classe des ouverts ou la classe des fermés.

définition :

La tribu Borélienne de $\mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par la classe des "rectangles" ouverts de $\mathbb{R}^d$ $\left(\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\right)$

prop :

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$, par les boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$.

4) Les mesures

On considère un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

déf : une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ est une application μ de $\mathcal{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant la σ-additivité suivante :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu(A_n)$$ pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ deux à deux disjoints.

et 2) $\mu(\emptyset)=0$

La mesure est dite finie si $\mu(E)<\infty$.

Rq: une mesure est une application sur la tribu $\mathcal{E}$. Mais par abus de langage, $\mu(A)$ pour $A\in\mathcal{E}$ s'appelle la mesure de l'ensemble A.

Exemples:

1) la mesure nulle est celle telle que $\forall A\in\mathcal{E}$, $\mu(A)=0$.

2) la mesure infinie est celle ____________, $\mu(A)=+\infty$ sauf $\mu(\emptyset)=0$.

3) la mesure de Dirac en x est:

$$\varepsilon_x(A)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

4) la mesure de comptage est celle tq $\forall A\in\mathcal{E}$, $\mu(A)$ est le nombre de pt de A

Prop

$\forall A, B, A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{E}$

$$\mu(A_1\cup\dots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) \text{ si 2 à 2 disjoints}$$

$$\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$$

$$A\subset B \Rightarrow \mu(A)\leq\mu(B)$$

Théorème Soit μ une mesure sur $(E,\mathcal{E})$

a) Pour toute suite croissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{E}$,

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right)=\lim_n \mu(A_n)$$

b) Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ convergeant vers A, et s'il existe $B\in\mathcal{E}$ tq $A_n\subset B$ pour tout n et $\mu(B)<\infty$

$$\Rightarrow \mu(A_n)\to\mu(A)$$

Prop Soit μ une mesure sur $(E,\mathcal{E})$ et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'élém de $\mathcal{E}$. On a:

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right)\leq\sum_n\mu(A_n)$$

propriété

- Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et soit $B \in \mathcal{E}$.
  On définit $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.
  μ_B est une mesure.

- Soit μ et ν deux mesures sur $(E, \mathcal{E})$.
  On définit $\eta(A) = \mu(A) + \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$
  η est une mesure

- Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et $a \in \mathbb{R}_+$.
  On définit $\nu(A) = a \times \mu(A)$ pour tout $a \in \mathcal{E}$
  ν est une mesure.

proposition Soit (μ_n) une suite de mesures sur $(E, \mathcal{E})$

a) Si (μ_n) est croissante, ce qui veut dire $\forall A \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$
la formule $\mu(A) = \lim_n \uparrow \mu_n(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$ définit une nouvelle mesure appelée limite croissante des μ_n.

b) la formule $\nu(A) = \sum_n \mu_n(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$ définit une nouvelle mesure ν.

définition Une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ est une mesure de masse totale $\mu(E) = 1$

5) Mesure de Lebesgue

Théorème: . La mesure de Lebesgue est la seule mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que
$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ $\quad \lambda([a,b]) = \lambda(]a,b]) = \lambda(]a,b[) = \lambda([a,b[) = b - a$

. Il existe une et une seule mesure λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que
$\forall a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}$, avec $a_i < b_i$

$$\lambda_d\left(\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

6) Fonctions mesurables

Cette notion est utile pour la théorie de l'intégration car il faut une certaine régularité des fonctions que l'on intègre pour que les intégrales existent.

Rappel : Soit $f : E \to F$ une application.

Soit A une partie de F. L'image réciproque de A par f, notée $f^{-1}(A)$ est définie par :

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \text{ tq } f(x) \in A\}.$$

$$f^{-1}(F) = E, \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \qquad f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

Soit $\mathcal{A}$ une classe de parties de F.

$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{A}\}$$

prop : Si $\mathcal{F}$ est une tribu de F, alors $f^{-1}(\mathcal{F})$ est une tribu de E.

définition : Soit $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ une application

a) On dit que f est une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$ si la tribu $f^{-1}(\mathcal{F})$ est contenue dans $\mathcal{E}$.

b) Une fonction sur E, autrement dit une application de E dans $\mathbb{R}$, est dite mesurable par rapport à $\mathcal{E}$, si elle est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

c) Lorsque $E = \mathbb{R}^d$ et $F = \mathbb{R}^d$ avec leurs tribus boréliennes respectives, une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$ est dite borélienne.

d) Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions sur E, on appelle tribu engendrée par cette famille, notée $\sigma(f_i, i \in I)$ la plus petite tribu de E rendant mesurables la

exemple :

1) On munit E de la tribu $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$. Toute application de E dans $(F, \mathcal{F})$ est mesurable

2) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Toute application constante est mesurable.

Critères de mesurabilité :

1) Soit f une application de E dans F.
Soit $\mathcal{A}$ une classe de parties de F telle que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$
Pour que f soit mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$ il faut et il suffit que
$\forall A \in \mathcal{A}, \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$

2) Soit $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$ et $(G, \mathcal{G})$ trois espaces mesurables
Soit f une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$ et g une application mesurable de $(F, \mathcal{F})$ dans $(G, \mathcal{G})$, alors l'application $h = g \circ f$ est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(G, \mathcal{G})$.

3) Toute application continue de $E = \mathbb{R}^d$ dans $F = \mathbb{R}^q$ est Borélienne.

prop : . Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Pour qu'une fonction f sur E soit mesurable, il faut et il suffit qu'elle vérifie une des propriétés suivantes :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{f \leq x\} \in \mathcal{E}$
(ii) $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \{f \leq x\} \in \mathcal{E}$
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{f < x\} \in \mathcal{E}$
(iv) $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \{f < x\} \in \mathcal{E}$

. Soit $f_1, \dots, f_d$ des fonctions réelles mesurables sur $(E, \mathcal{E})$.
Soit g une fonction Borélienne sur $\mathbb{R}^d$. On définit $h(x) = g(f_1(x), \dots, f_d(x))$.
Alors h est mesurable sur $(E, \mathcal{E})$.

↳ limite de fonction mesurable
(f_n) suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ converge vers f si $\forall x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$.
Plus généralement :

définition

$$\limsup_n f_n(x) = \lim_n \downarrow \sup_{m \geq n} f_m(x) = \inf_n \sup_{m \geq n} f_m(x)$$

$$\liminf_n f_n(x) = \lim_n \uparrow \inf_{m \geq n} f_m(x) = \sup_n \inf_{m \geq n} f_m(x)$$

prop : Soit (f_n) une suite de fonction mesurable sur $(E, \mathcal{E})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) les fonctions $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables

b) les fonctions $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont mesurables

c) $\{x \in E \text{ tq } f_n(x) \text{ converge}\} \in \mathcal{E}$

d) si (f_n) converge alors sa limite est mesurable.

Image d'une mesure par une application

On considère f une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$, et μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

Théorème :

Si $\forall B \in \mathcal{F}$, on pose $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$, alors ν est une mesure sur $(F, \mathcal{F})$ appelée mesure image de μ par f.

1) Intégrale de fonctions mesurables

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable sur lequel on définit une mesure μ.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{E})$.

On veut définir $\int f d\mu$ de sorte que la définition soit valable pour une classe de fonctions de $\mathcal{F}$ aussi grande que possible et telle que

$$\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A) \quad \text{si } A \in \mathcal{E}$$

$$f \Rightarrow \int f d\mu \text{ linéaire}$$

a) les fonctions étagées

Une fonction étagée est une fonction qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Une telle fonction s'écrit :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{avec } A_1, \dots, A_n \text{ des ensembles mesurables}$$

ou encore $f = \sum_{a \in U} a \, \mathbb{1}_{\{f = a\}}$

déf :

$$\int f d\mu = \sum_{a \in U} a \, \mu(\{f = a\})$$

prop:

- soit $a>0$ et f étagée, $\int (af)\,d\mu = a\int f\,d\mu$
- soit f, g étagées, $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$
- soit f, g étagées avec $f \leq g \Rightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$

- Soit (f_n) une suite croissante de f^{ct} étagées. Soit $f = \lim_n \uparrow f_n$
  (i) Soit g étagée tq $g \leq f \Rightarrow \int g\,d\mu \leq \lim_n \uparrow \int f_n\,d\mu$
  (ii) Si de plus f est étagée $\int f\,d\mu = \lim_n \uparrow \int f_n\,d\mu$

b) les fonctions positives

lemme: Soit f une fonction positive et mesurable. f est limite d'une suite croissante (f_n) de fonctions étagées.

preuve: $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{si } \dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n} \quad k \in [0, 1, \ldots, n2^n - 1] \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$

déf: $\int f\,d\mu = \sup \{ \int g\,d\mu,\ g \text{ étagée et } g \leq f \}$

Théorème:

(i) Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et f mesurable positive $\int (af)\,d\mu = a\int f\,d\mu$
(ii) Soit f, g mesurables positives $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$
(iii) Soit f, g mesurables positives avec $f \leq g \Rightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$
iv) Th. de convergence monotone
Soit (f_n) une suite de f^{ct} mesurables positives qui croit vers une limite f
alors $\lim_n \uparrow \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$
v) Pour toute suite de f^{ct} (f_n) mesurables positives,

$\int (\inf_n f_n)\,d\mu \leq \inf_n \int f_n\,d\mu \qquad \int (\sup_n f_n)\,d\mu \geq \sup_n \int f_n\,d\mu$

$\int (\liminf_n f_n)\,d\mu \leq \liminf_n \int f_n\,d\mu$

c) fonctions de signe quelconque

Soit f une fonction mesurable, on pose $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$

Ainsi $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

déf. • f f^{ct} mesurable admet une intégrale si on n'a ni $\int f^+ d\mu = \infty$ ni $\int f^- d\mu = \infty$

et alors $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

• on dit que f est intégrable si $\int |f| d\mu < \infty$

on note $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables et intégrables

Théorème : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables

a) Fatou

Soit g une f^{ct} réelle intégrable

- si $\forall n \; f_n \geq g \Rightarrow \int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$
- si $\forall n, \; f_n \leq g \Rightarrow \int (\limsup f_n) d\mu \geq \limsup_n \int f_n d\mu$

b) convergence dominée

Soit f une f^{ct} intégrable tq $|f_n| \leq g$ avec $f_n \to f$

alors $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$