Cours probabilités et statistiques

C. Tuleau-Malot

Université de Nice - Sophia Antipolis

Plan

Exercices

Exercice 1:

On considère un sac contenant:

- 5 billets de 5 euros
- 7 billets de 10 euros
- 10 billets de 20 euros

On tire au hasard et simultanément 8 billets, Chacun ayant la même probabilité d'être tirés.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucun billet de 5 euros?
2. Quelle est la probabilité de n'avoir que des billets de 20 euros?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un billet de chaque?
4. Que deviennent ces probabilités quand cette fois on tire chaque billet les uns avec les autres en les remettant arès chaque tirage?

Exercices

Correction de Exercice 1:

1. il n'y a pas de notion d'ordre et il ne peut pas y avoir de répétition du même billet.
   On utilise la formule, car la même probabilité pour chaque billet d'être tiré : le nombre d'événements favorables divisés par le nombre total d'événements.
   Le nombre total d'événements est : $\begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix}$
   Le nombre d'événements favorables est : $\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}$
   La probabilité est donc : $\frac{17*16*...*10}{22*21*...*15} \simeq 0.076$

Exercices

Le nombre d'événements favorables est : $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

La probabilité est donc : $\simeq 1.41 * 10^{-4}$

Exercices

Pour la dernière question, nous allons raisonner en utilisant l'événement complémentaire.
Soit $U = \{$obtenir que des billets d'une seule valeur$\}$ et
$D = \{$obtenir que des billets de deux valeurs$\}$
On a :

- nombre d'éléments dans U = nbr de cas où que des 5 euros + nbr de cas où que des 10 euros + nbr de cas où que des 20 euros

  donc nombre d'éléments dans $U = 0 + 0 + \binom{10}{8}$
- nombre d'éléments dans D = nbr de cas où que du 5 euros ou du 10 euros + nbr de cas où que du 5 euros ou du 20 euros + nbr de cas où que du 20 euros ou du 10 euros
- nbr de cas où que du 5 euros ou du 10 euros $= \binom{12}{8}$
- nbr de cas où que du 5 euros ou du 20 euros $= \binom{15}{8} -$

Exercices

Donc au final, P(au moins un de chaque)=

$$1 - \frac{\binom{17}{8}+\binom{15}{8}+\binom{12}{8}-\binom{10}{8}}{\binom{22}{8}} \simeq 0,902$$

Exercices

Maintenant notion d'ordre et il peut y avoir des répétitions! Mais on utilise la même formule pour calculer une probabilité, à savoir le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas total.

1. Le nombre total d'événements est : 22^8
   Le nombre d'événements favorables est : 17^8
   La probabilité est : $\frac{17^8}{22^8} \simeq 0.127$
2. Le nombre d'événements favorables est : 10^8
   La probabilité est : $\frac{10^8}{22^8} \simeq 1.82 * 10^{-3}$

Exercices

<u>Exercice 2:</u>
On prend au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes, simultanément.
On veut calculer la probabilité d'obtenir :

- 4 rois,
- 3 rois,
- 2 rois,
- 1 roi,
- 0 roi.

Exercices (5)

Correction de exercice 2:

- $P(4 \text{ rois}) = \dfrac{28}{\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}}$

  Il n'y a qu'une manière de prendre les 4 rois et 28 cartes possibles pour la 5ème carte.

- $P(3 \text{ rois}) = \dfrac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}}$

  il y a en effet $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ manières de choisir 3 rois au sein des 4 possibles, et il y a deux cartes à choisir au sein des 28 restantes.

Exercices (6)

- $P(2\text{ rois}) = \dfrac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 28 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}}$

- $P(1\text{ roi}) = \dfrac{4.\begin{pmatrix} 28 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}}$

- $P(0\text{ roi}) = \dfrac{\begin{pmatrix} 28 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}}$

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète est définie donc par la donnée de :

- $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles prises par X
- pour tout x élément de $X(\Omega)$, $P(X = x)$

Il existe certaines variables aléatoires que l'on rencontre plus que d'autres.

Variables aléatoires discrètes classiques

Variable de Bernoulli: $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0;1]$

- Que deux valeurs possibles : succès (codé par 1) et échec (codé par 0)
- probabilité d'un succès (avoir 1) vaut p.

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$,
  $P(X = k) = \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} p^k(1 - p)^{n-k}$

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$,
  $P(X = k) = \left(\begin{array}{c} \mathrm{n} \\ \mathrm{k} \end{array}\right) p^k (1-p)^{n-k}$
- modélisation: On répète n fois une même expérience de Bernoulli et on suppose que les expériences sont indépendantes (l'issue d'une expérience n'influe pas sur l'issue d'une autre expérience) . La variable binomiale correspond alors au nombre de fois où l'on a rencontré un succès au cours des n expériences.

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$,
  $P(X = k) = \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$
- modélisation: On répète n fois une même expérience de Bernoulli et on suppose que les expériences sont indépendantes (l'issue d'une expérience n'influe pas sur l'issue d'une autre expérience) . La variable binomiale correspond alors au nombre de fois où l'on a rencontré un succès au cours des n expériences.
- Exemple : $n = 6$, une réalisation des 6 expériences est 0 1 0 0 1 0

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0\}$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
- modélisation: On répète des expériences de Bernoulli, de manière indépendante, et ce jusqu'à rencontrer le premier succès. Le nombre d'expérience réalisée est la valeur de notre variable aléatoire.

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
- modélisation: On répète des expériences de Bernoulli, de manière indépendante, et ce jusqu'à rencontrer le premier succès. Le nombre d'expérience réalisée est la valeur de notre variable aléatoire.
- Exemple : 0 0 0 0 0 0 0 1

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

- Variable hypergéométrique: $\mathcal{H}(N, n, m)$,
  $(N \in \mathbb{N} - \{0\},\ (n, m) \in \{1, \ldots, N\}^2)$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

- Variable hypergéométrique: $\mathcal{H}(N, n, m)$, $(N \in \mathbb{N} - \{0\},\ (n, m) \in \{1, \ldots, N\}^2)$
  - $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, min(n, m)\}$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

- Variable hypergéométrique: $\mathcal{H}(N, n, m)$, $(N \in \mathbb{N} - \{0\},\ (n, m) \in \{1, \ldots, N\}^2)$
  - $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, min(n, m)\}$
  - pour tout élément $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{m} \\ \text{k} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \text{N-m} \\ \text{n-k} \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} \text{N} \\ \text{n} \end{array}\right)}$$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

- Variable hypergéométrique: $\mathcal{H}(N, n, m)$,
  $(N \in \mathbb{N} - \{0\},\ (n, m) \in \{1, \ldots, N\}^2)$
  - $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, min(n, m)\}$
  - pour tout élément $k \in X(\Omega)$,
    $$P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{N-m} \\ \text{n-k} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \text{N} \\ \text{n} \end{pmatrix}}$$
  - modélisation: dans une urne, il y a N boules dont m sont jaunes. On tire au hasard n boules et on regarde le nombre de boules jaunes parmi les n.

Variables aléatoires discrètes classiques (4)

- Variable de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

Variables aléatoires discrètes classiques (4)

- Variable de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
  - $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Variables aléatoires discrètes classiques (4)

- Variable de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
  - $X(\Omega) = \mathbb{N}$
  - pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Variables aléatoires discrètes classiques (4)

- Variable de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
  - $X(\Omega) = \mathbb{N}$
  - pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
  - modélisation: cette variable modélise des situations avec des événements rares.

Exercices

Exercice 4:

Une compagnie pharmaceutique décide d'économiser de l'argent sur l'affranchissement du courrier. Ainsi, la compagnie décide que 3 lettres sur 5 seront envoyées au tarif urgent alors que les autres seront au tarif normal. Le choix des lettres envoyées au tarif urgent est fait au hasard.

1. Quatre lettres sont envoyées à un cabinet médical comprenant quatre médecins. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - au moins l'un des médecins a une lettre au tarif urgent
   - deux médecins exactement ont une lettre au tarif urgent
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lettres envoyées au tarif urgent sur les 10 lettres postées. Quelle est la distribution de X?

Exercices(2)

<u>Correction de exercice 4:</u>

On peut considérer une variable binomiale pour calculer les probabilités puisque l'on compte le nombre de succès (tarif urgent)quand on répète la même expérience 4 fois, expérience qui et une Bernoulli!

1. $P(\text{au moins l'un des médecins a une lettre au tarif urgent}) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4$
2. $$P(\text{deux médecins exactement ont une lettre au tarif urgent}) = 6.\left(\frac{3}{5}\right)^2.\left(\frac{2}{5}\right)^2$$
3. X est une variable binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 3/5$.

Exercices(3)

<u>Exercice 5:</u>

Au hasard et en même temps, on prélève 3 ampoules parmi 15. Parmi les 15, seulement 5 sont défectueuses. Calculer les probabilités suivantes :

1. au minimum, une ampoule défectueuse sur les 3
2. les 3 ampoules sont défectueuses
3. une seule ampoule est défectueuse

Exercices(4)

Correction de exercice 5:

La variable considérée est une hypergéométrique.

1. $P(\text{au minimum, une ampoule défectueuse sur les 3}) =$
$$1 - \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}}$$
2. $P(\text{les 3 ampoules sont défectueuses}) = \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}}$
3. $P(\text{une seule ampoule est défectueuse}) = \dfrac{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}}$

Espérance et Variance

- Espérance : c'est une sorte de "moyenne" des valeurs de la variable aléatoire.

Espérance et Variance

- Espérance : c'est une sorte de "moyenne" des valeurs de la variable aléatoire.

  - considérons le jeu suivant : On lance un dé plusieurs fois, et à chaque lancer on donne 1 euro. Si le chiffre sur la face supérieur est pair, on gagne 1 euro, si le chiffre sur la face supérieur est 1 ou 3 on récupère 2 euros sinon on donne en plus 2 euro. A t'on intérêt à jouer à ce jeu?

Espérance et Variance

- Espérance : c'est une sorte de "moyenne" des valeurs de la variable aléatoire.

  - considérons le jeu suivant : On lance un dé plusieurs fois, et à chaque lancer on donne 1 euro. Si le chiffre sur la face supérieur est pair, on gagne 1 euro, si le chiffre sur la face supérieur est 1 ou 3 on récupère 2 euros sinon on donne en plus 2 euro. A t'on intérêt à jouer à ce jeu?

  - Comment elle se calcule?

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x)$$

quand X est une variable discrète

Espérance et Variance

- Espérance : c'est une sorte de “moyenne” des valeurs de la variable aléatoire.

  - considérons le jeu suivant : On lance un dé plusieurs fois, et à chaque lancer on donne 1 euro. Si le chiffre sur la face supérieur est pair, on gagne 1 euro, si le chiffre sur la face supérieur est 1 ou 3 on récupère 2 euros sinon on donne en plus 2 euro. A t'on intérêt à jouer à ce jeu?

  - Comment elle se calcule?

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x)$$

    quand X est une variable discrète

  - **l'espérance n'existe pas toujours**

Espérance et Variance(2)

Considérons la variable suivante:

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

Espérance et Variance(3)

Propriétés de l'espérance :

- Soit X, Y deux variables aléatoires et a, b, deux réels, alors:

$$\mathbb{E}[a.X + b.Y] = a.\mathbb{E}[X] + b.\mathbb{E}[Y]$$

- Soit X, Y deux variables aléatoires, si $X < Y$, $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$
- Soit X une variable aléatoire et h une fonction, alors :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} h(x).P(X = x)$$

si X est une variable aléatoire discrète

Espérance et Variance(4)

- Variance: c'est la distance entre la variable aléatoire et son espérance.
  Soit X une variable aléatoire, la variance est définie par:

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Espérance et Variance(4)

- Variance: c'est la distance entre la variable aléatoire et son espérance.
  Soit X une variable aléatoire, la variance est définie par:

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

- l'écart-type : c'est la racine carrée de la variance

Espérance et Variance(5)

Propriétés de la variance :

- $V[X] \geq 0$
- $V[X] = 0$ si et seulement si X est constante
- soit X une variable aléatoire et a, b deux réels :
  $V[a.X + b] = a^2.V[X]$
- $V[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- en général, ceci est faux $V[X + Y] = V[X] + V[Y]$!

Espérance et Variance(6)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

Espérance et Variance(6)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la variance ?

Espérance et Variance(6)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la variance ?
  $\mathbb{V}[X] = (-3)^2 * 1/6 + (1)^2 * 1/2 + (2)^2 * 1/3 - (2/3)^2 = 26/9$

Espérance et Variance(7)

Variable discrète classique :

Distribution	Expérance	Variance
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	p	$p.(1-p)$
Binomial $\mathcal{B}(n,p)$	$n.p$	$n.p.(1-p)$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,m)$	$\frac{n.m}{N}$	$\frac{N-n}{N-1}.\frac{n.m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

Fonction de répartition

Définition:

La fonction de répartition F_X associée à une variable aléatoire X est définie par :

$$\text{pour tout élément} \quad x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

Fonction de répartition

Définition:

La fonction de répartition F_X associée à une variable aléatoire X est définie par :

$$\text{pour tout élément} \quad x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

- cadre discret : $F_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega), k \leq x} P(X = k)$

Fonction de répartition

Définition:
La fonction de répartition F_X associée à une variable aléatoire X est définie par :

$$\text{pour tout élément} \quad x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

- cadre discret : $F_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega), k \leq x} P(X = k)$
- cadre continu : $F_X(x) = \int_{t \leq x} f(t).dt$ où f représente la fonction de densité
  Cela signifie que l'on calcule l'aire sous la courbe jusqu'à $x = t$.

Fonction de répartition

Définition:

La fonction de répartition F_X associée à une variable aléatoire X est définie par :

$$\text{pour tout élément} \quad x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

- cadre discret : $F_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega), k \leq x} P(X = k)$
- cadre continu : $F_X(x) = \int_{t \leq x} f(t).dt$ où f représente la fonction de densité
  Cela signifie que l'on calcule l'aire sous la courbe jusqu'à $x = t$.
- attention dans le cadre continu,
  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$ mais ceci est faux en général dans le cadre discret!

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue à droite et croissante

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue à droite et croissante
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue par morceaux

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue à droite et croissante
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue par morceaux
- C continu:

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue à droite et croissante
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue par morceaux
- C continu:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x\to-\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x\to+\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue à droite et croissante
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue par morceaux
- C continu:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x\to-\infty}{F_X(x)} = 0$ and $\underset{x\to+\infty}{F_X(x)} = 1$

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue à droite et croissante
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue par morceaux
- C continu:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ and $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est croissante

Fonction de répartition

Propriétés :

- Cadre discret:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue à droite et croissante
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction continue par morceaux
- C continu:
  - pour tout élément x $\in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ and $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est croissante
  - $x \to F_X(x)$ est continue

Fonction de répartition

<u>Théorème:</u>

La fonction de répartition caractérise une variable aléatoire.
It means that:

$$F_X = F_Y \;\Leftrightarrow\; X \;\text{ est équivalent à }\; Y \;\text{ ont la même loi}$$

Attention, deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi sans être égales pour autant!
Exemple: Soit $X \sim \mathcal{U}([-1,1])$ et $Y = -X$. X et ^{Y} ne sont pas égales mais elles sont toutes les deux $\mathcal{U}([-1,1])$.