Cours probabilités et statistiques M1

C. Tuleau-Malot

Université de Nice - Sophia Antipolis

Plan

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète est définie donc par la donnée de :

- $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles prises par X
- pour tout x élément de $X(\Omega)$, $P(X = x)$

Il existe certaines variables aléatoires que l'on rencontre plus que d'autres.

Variables aléatoires discrètes classiques

Variable de Bernoulli: $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0;1]$

- Que deux valeurs possibles : succès (codé par 1) et échec (codé par 0)
- probabilité d'un succès (avoir 1) vaut p.

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0;1]$

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$,
  $P(X = k) = \left(\begin{array}{c} \mathrm{n} \\ \mathrm{k} \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}$

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$,
  $P(X = k) = \left(\begin{array}{c} \text{n} \\ \text{k} \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}$
- modélisation: On répète n fois une même expérience de Bernoulli et on suppose que les expériences sont indépendantes (l'issue d'une expérience n'influe pas sur l'issue d'une autre expérience) . La variable binomiale correspond alors au nombre de fois où l'on a rencontré un succès au cours des n expériences.

Variables aléatoires discrètes classiques (2)

Variable binomiale: $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$,
  $P(X = k) = \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{k} \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$
- modélisation: On répète n fois une même expérience de Bernoulli et on suppose que les expériences sont indépendantes (l'issue d'une expérience n'influe pas sur l'issue d'une autre expérience) . La variable binomiale correspond alors au nombre de fois où l'on a rencontré un succès au cours des n expériences.
- Exemple : $n = 6$, une réalisation des 6 expériences est 0 1 0 0 1 0

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0\}$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
- modélisation: On répète des expériences de Bernoulli, de manière indépendante, et ce jusqu'à rencontrer le premier succès. Le nombre d'expérience réalisée est la valeur de notre variable aléatoire.

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

Variable géométrique : $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0;1]$

- $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0\}$
- pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
- modélisation: On répète des expériences de Bernoulli, de manière indépendante, et ce jusqu'à rencontrer le premier succès. Le nombre d'expérience réalisée est la valeur de notre variable aléatoire.
- Exemple : 0 0 0 0 0 0 0 1

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

- Variable hypergéométrique: $\mathcal{H}(N, n, m)$,
  $(N \in \mathbb{N} - \{0\},\ (n, m) \in \{1, \ldots, N\}^2)$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

- Variable hypergéométrique: $\mathcal{H}(N, n, m)$, $(N \in \mathbb{N} - \{0\},\ (n, m) \in \{1, \ldots, N\}^2)$
  - $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, min(n, m)\}$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

- Variable hypergéométrique: $\mathcal{H}(N, n, m)$, $(N \in \mathbb{N} - \{0\},\ (n, m) \in \{1, \dots, N\}^2)$
  - $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, min(n, m)\}$
  - pour tout élément $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{N-m} \\ \text{n-k} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \text{N} \\ \text{n} \end{pmatrix}}$$

Variables aléatoires discrètes classiques (3)

- Variable hypergéométrique: $\mathcal{H}(N, n, m)$, $(N \in \mathbb{N} - \{0\},\ (n, m) \in \{1, \dots, N\}^2)$
  - $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, min(n, m)\}$
  - pour tout élément $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{N-m} \\ \text{n-k} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \text{N} \\ \text{n} \end{pmatrix}}$$

  - modélisation: dans une urne, il y a N boules dont m sont jaunes. On tire au hasard n boules et on regarde le nombre de boules jaunes parmi les n.

Variables aléatoires discrètes classiques (4)

- Variable de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

Variables aléatoires discrètes classiques (4)

- Variable de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
  - $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Variables aléatoires discrètes classiques (4)

- Variable de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
  - $X(\Omega) = \mathbb{N}$
  - pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Variables aléatoires discrètes classiques (4)

- Variable de Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
  - $X(\Omega) = \mathbb{N}$
  - pour tout élément $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
  - modélisation: cette variable modélise des situations avec des événements rares.

Exercices

Exercice :

Une compagnie pharmaceutique décide d'économiser de l'argent sur l'affranchissement du courrier. Ainsi, la compagnie décide que 3 lettres sur 5 seront envoyées au tarif urgent alors que les autres seront au tarif normal. Le choix des lettres envoyées au tarif urgent est fait au hasard.

1. Quatre lettres sont envoyées à un cabinet médical comprenant quatre médecins. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - au moins l'un des médecins a une lettre au tarif urgent
   - deux médecins exactement ont une lettre au tarif urgent
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lettres envoyées au tarif urgent sur les 10 lettres postées. Quelle est la distribution de X?

Exercices

Correction de l'exercice :

On peut considérer une variable binomiale pour calculer les probabilités puisque l'on compte le nombre de succès (tarif urgent)quand on répète la même expérience 4 fois, expérience qui et une Bernoulli!

1. $P(\text{au moins l'un des médecins a une lettre au tarif urgent}) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4$
2. $P(\text{deux médecins exactement ont une lettre au tarif urgent}) = 6.\left(\frac{3}{5}\right)^2.\left(\frac{2}{5}\right)^2$
3. X est une variable binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 3/5$.

Exercices

Exercice :

Au hasard et en même temps, on prélève 3 ampoules parmi 15. Parmi les 15, seulement 5 sont défectueuses. Calculer les probabilités suivantes :

1. au minimum, une ampoule défectueuse sur les 3
2. les 3 ampoules sont défectueuses
3. une seule ampoule est défectueuse

Exercices

Correction de l'exercice :

La variable considérée est une hypergéométrique.

1. P(au minimum, une ampoule défectueuse sur les 3) $=$
$$1-\frac{\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}15\\3\end{pmatrix}}$$
2. P(les 3 ampoules sont défectueuses) $=\dfrac{\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}15\\3\end{pmatrix}}$
3. P(une seule ampoule est défectueuse) $=\dfrac{\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}15\\3\end{pmatrix}}$

Espérance et Variance

- Espérance : c'est une sorte de “moyenne” des valeurs de la variable aléatoire.

Espérance et Variance

- Espérance : c'est une sorte de “moyenne” des valeurs de la variable aléatoire.

  - considérons le jeu suivant : On lance un dé plusieurs fois, et à chaque lancer on donne 1 euro. Si le chiffre sur la face supérieur est pair, on gagne 1 euro, si le chiffre sur la face supérieur est 1 ou 3 on récupère 2 euros sinon on donne en plus 2 euro. A t'on intérêt à jouer à ce jeu?

Espérance et Variance

- Espérance : c'est une sorte de "moyenne" des valeurs de la variable aléatoire.

  - considérons le jeu suivant : On lance un dé plusieurs fois, et à chaque lancer on donne 1 euro. Si le chiffre sur la face supérieur est pair, on gagne 1 euro, si le chiffre sur la face supérieur est 1 ou 3 on récupère 2 euros sinon on donne en plus 2 euro. A t'on intérêt à jouer à ce jeu?

  - Comment elle se calcule?

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x)$$

quand X est une variable discrète

Espérance et Variance

- Espérance : c'est une sorte de "moyenne" des valeurs de la variable aléatoire.

  - considérons le jeu suivant : On lance un dé plusieurs fois, et à chaque lancer on donne 1 euro. Si le chiffre sur la face supérieur est pair, on gagne 1 euro, si le chiffre sur la face supérieur est 1 ou 3 on récupère 2 euros sinon on donne en plus 2 euro. A t'on intérêt à jouer à ce jeu?

  - Comment elle se calcule?

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x)$$

quand X est une variable discrète

  - **l'espérance n'existe pas toujours**

Espérance et Variance(2)

Considérons la variable suivante:

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- la valeur de l'espérance est :

$$1/6 * (-3) + 1/2 * (1) + 1/3 * (2)$$

Espérance et Variance(3)

Propriétés de l'espérance :

- Soit X, Y deux variables aléatoires et a, b, deux réels, alors:

$$\mathbb{E}[a] = a$$

$$\mathbb{E}[a.X] = a.\mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$$

- Soit X, Y deux variables aléatoires, si $X < Y$, $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$
- Soit X une variable aléatoire et h une fonction, alors :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} h(x).P(X = x)$$

si X est une variable aléatoire discrète

Espérance et Variance(4)

- Variance: c'est la distance entre la variable aléatoire et son espérance.
  Soit X une variable aléatoire, la variance est définie par:

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Espérance et Variance(4)

- Variance: c'est la distance entre la variable aléatoire et son espérance.
  Soit X une variable aléatoire, la variance est définie par:

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

- l'écart-type : c'est la racine carrée de la variance

Espérance et Variance(5)

Propriétés de la variance :

- $V[X] \geq 0$
- $V[X] = 0$ si et seulement si X est constante
- soit X une variable aléatoire et a, b deux réels :
  $V[a.X] = a^2.V[X]$, $V[X + b] = V[X]$
- $V[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- en général, ceci est faux $V[X + Y] = V[X] + V[Y]$!

Espérance et Variance(6)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

Espérance et Variance(6)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la variance ?

Espérance et Variance(6)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la variance ?
  $\mathbb{V}[X] = (-3)^2 * 1/6 + (1)^2 * 1/2 + (2)^2 * 1/3 - (2/3)^2 = 26/9$

Espérance et Variance(7)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ if } 0 \leq x < 3 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Espérance et Variance(7)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ if } 0 \leq x < 3 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

- Quelle est la valeur de a?
  $a = 1/3$ car l'aire de la fonction doit valoir 1 et la fonction doit être positive.

Espérance et Variance(7)

Soit la variable aléatoire discrète suivante :

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ if } 0 \leq x < 3 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

- Quelle est la valeur de a?
  $a = 1/3$ car l'aire de la fonction doit valoir 1 et la fonction doit être positive.
- Que vaut la variance ?

Espérance et Variance(7)

Variable discrète classique :

Distribution	Expérance	Variance
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	p	$p.(1-p)$
Binomial $\mathcal{B}(n,p)$	$n.p$	$n.p.(1-p)$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,m)$	$\frac{n.m}{N}$	$\frac{N-n}{N-1}.\frac{n.m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

Fonction de répartition

Définition:

La fonction de répartition F_X associée à la variable X est définie par :

$$\text{pour tout élément} x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

Fonction de répartition

<u>Définition:</u>

La fonction de répartition F_X associée à la variable X est définie par :

$$\text{pour tout élément} x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

- cas discret: $F_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega), k \leq x} P(X = k)$

Fonction de répartition

Définition:

La fonction de répartition F_X associée à la variable X est définie par :

$$\text{pour tout élément} x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

- cas discret: $F_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega), k \leq x} P(X = k)$
- cas continu: $F_X(x) = \int_{t \leq x} f(t).dt$ où f est la fonction de densité

Fonction de répartition

Définition:
La fonction de répartition F_X associée à la variable X est définie par :

$$\text{pour tout élément} x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

- cas discret: $F_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega), k \leq x} P(X = k)$
- cas continu: $F_X(x) = \int_{t \leq x} f(t).dt$ où f est la fonction de densité
- attention, dans le cas continu $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$ **mais ce n'est en général pas le cs dans le cadre discret!**

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq 0$

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}, \ F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq 0$
  - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante et continue à droite

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante et continue à droite
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction constante par morceaux

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante et continue à droite
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction constante par morceaux
- Cas continu:

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante et continue à droite
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction constante par morceaux
- Cas continu:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq 0$

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante et continue à droite
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction constante par morceaux
- Cas continu:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante et continue à droite
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction constante par morceaux
- Cas continu:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante

Fonction de répartition(2)

Propriétés:

- Cas discret:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante et continue à droite
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction constante par morceaux
- Cas continu:
  - pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \geq 0$
  - $\underset{x \to -\infty}{F_X(x)} = 0$ et $\underset{x \to +\infty}{F_X(x)} = 1$
  - $x \to F_X(x)$ est une fonction croissante
  - $x \to F_X(x)$ est continue

Fonction de répartition(3)

Theorem:

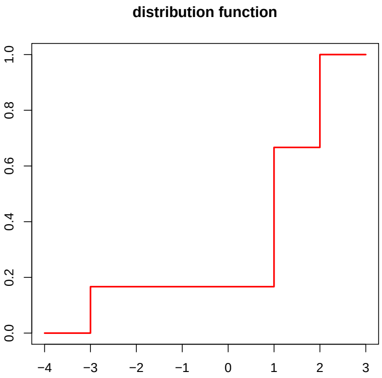
La fonction de répartition caractérise une variable aléatoire.
It means that:

$$F_X = F_Y \;\Leftrightarrow\; X \;\; \textbf{et} \; Y \;\; \textbf{ont la même distribution}$$

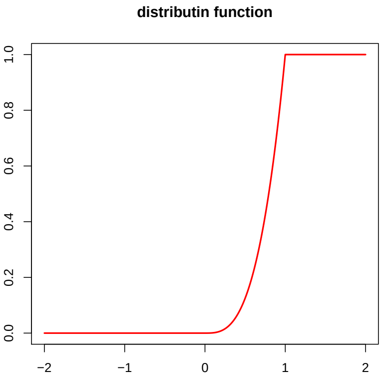
Attention, deux variables aléatoires peuvent avoir la même distribution sans être égale pour autant!
Exemple: Soit $X \sim \mathcal{U}([-1,1])$ et $Y = -X$. X et ^{Y} ne sont pas égales mais sont toutes les deux $\mathcal{U}([-1,1])$.

Fonction de répartition(4)

cas discret :



cas continu



Fonction de répartition(5)

Soit la variable aléatoire discrète:

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

Fonction de répartition(5)

Soit la variable aléatoire discrète:

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la fonction de répartition?

Fonction de répartition(5)

Soit la variable aléatoire discrète:

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la fonction de répartition?

  $\forall\ x < -3,\ F_X(x) = 0$

Fonction de répartition(5)

Soit la variable aléatoire discrète:

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la fonction de répartition?

  $\forall\ x < -3,\ F_X(x) = 0$

  $\forall\ x\ \in\ [-3, 1[,\ F_X(x) = 1/6$

Fonction de répartition(5)

Soit la variable aléatoire discrète:

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la fonction de répartition?

  $\forall\ x < -3,\ F_X(x) = 0$

  $\forall\ x\ \in\ [-3, 1[,\ F_X(x) = 1/6$

  $\forall\ x\ \in\ [1, 2[,\ F_X(x) = 1/6 + 1/2 = 2/3$

Fonction de répartition(5)

Soit la variable aléatoire discrète:

k	-3	1	2
P(X=k)	1/6	1/2	1/3

- Que vaut la fonction de répartition?

  $\forall\ x < -3,\ F_X(x) = 0$

  $\forall\ x \in [-3, 1[,\ F_X(x) = 1/6$

  $\forall\ x \in [1, 2[,\ F_X(x) = 1/6 + 1/2 = 2/3$

  $\forall\ x \geq 2,\ F_X(x) = 1$

Exemples de calculs (1)

Soit X une variable aléatoire définie par :

k	-1	1	2
P(X=k)	1/4	1/2	1/4

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$
   Par définition, on a :

$$\mathbb{E}[X] = -1 * (1/4) + 1 * (1/2) + 2 * (1/4) = 3/4$$

Exemples de calculs (2)

On conserve le même exemple.

1. Calculer la fonction de répartition F_X
   Par définition, pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \leq x)$.
   - Si $x < -1$, $F_X(x) = 0$ car aucune valeur pour $X < -1$
   - Si $-1 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X = -1) = 1/4$ car entre $-\infty$ et x il n'y a que la valeur -1 que peut prendre X
   - Si $1 \leq x < 2$, $F_X(x) = P(X = -1) + P(X = 1) = 3/4$ car entre $-\infty$ et x il n'y a que les valeurs -1 et 1 que peut prendre X
   - Si $2 \leq x$, $F_X(x) = P(X = -1) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$ car entre $-\infty$ et x les valeurs -1, 1 et 2 sont possibles pour X

   Donc :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ 1/4 \text{ si } -1 \leq x < 1 \\ 3/4 \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ 1 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

Exemples de calculs (3)

On considère toujours l'exemple précédent.

1. Soit $Y = 2.X - 1$ Déterminer la loi de Y

k	-3	1	3
P(Y=k)	1/4	1/2	1/4

   En effet :

   - Si $X = -1$, alors $Y = 2.(-1) - 1 = -3$, si $X = 1$, alors $Y = 2.1 - 1 = 1$ et si $X = 2$, alors $Y = 2.2 - 1 = 3$
   - $P(Y = -3) = P(2.X - 1 = -3) = P(2.X = -2) = P(X = -1) = 1/4$
   - $P(Y = 1) = P(2.X - 1 = 1) = P(2.X = 2) = P(X = 1) = 1/2$
   - $P(Y = 3) = P(2.X - 1 = 3) = P(2.X = 4) = P(X = 2) = 1/4$

2. Calculer $\mathbb{E}[Y]$

   Par définition, on a :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[2.X - 1] = 2.\mathbb{E}[X] - 2 = 2.3/4 - 2 = -1/2$$

Exemples de calculs (4)

On considère toujours l'exemple précédent.

1. Soit $Z = X^2$ Déterminer la loi de Y

k	1	4
P(Z=k)	3/4	1/4

En effet :

- Si $X = -1$, alors $Z = (-1)^2 = 1$, si $X = 1$, alors $Z = (1)^2 = 1$ et si $X = 2$, alors $Z = (2)^2 = 4$
- $P(Z = 1) = P(X^2 = 1) = P(\{X = 1\}\text{ou}\{X = -1\}) = P(X = -1) + P(X = 1) = 1/4 + 1/2 = 3/4$
- $P(Z = 4) = P(X^2 = 4) = P(\{X = 2\}\text{ou}\{X = -2\}) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0 + 1/4 = 1/4$

Attention $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont disjoints, c'est à dire si $A \cap B = \emptyset$ (aucun point en commun)

Exemples de calculs (5)

On considère toujours l'exemple précédent.

1. Calculer $\mathbb{E}[Z]$
   Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[X^2] \\ &= (-1)^2.P(X=-1) + (1)^2 * P(X=1) + (2)^2 * P(X=2) \\ &= 1/4 + 1/2 + 4.1/4 = 7/4\end{aligned}$$

   ou vous pouvez utiliser la loi de Z pour déterminer $\mathbb{E}[Z]$.

Exercices

Exercice :

On prend au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes, simultanément.
On veut calculer la probabilité d'obtenir :

- 4 rois,
- 3 rois,
- 2 rois,
- 1 roi,
- 0 roi.

Exercices

<u>Correction de l'exercice:</u>

- $P(4 \text{ rois}) = \frac{28}{\binom{32}{5}}$

- $P(3 \text{ roiss}) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{5}}$

- $P(2 \text{ rois}) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}$

Exercices

- $P(1 \text{ roi}) = \dfrac{4.\begin{pmatrix} 28 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}}$
- $P(0 \text{ roi}) = \dfrac{\begin{pmatrix} 28 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}}$

Comment calculer des probabilités avec une loi normale?(1)

Une autre utilisation des fonctions de répartition est le calcul de probabilités :

$$P(X \in]a; b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

Mais peut-on toujours calculer à la main des probabilités?
Non, si l'on considère la loi normale, nous ne pouvons pas faire les calculs par nous même!

$\Rightarrow$ **On utilise une table!**

Comment calculer des probabilités avec une loi normale?(2)

Mais il n'existe qu'une seule table alors qu'il existe un nombre infini de variables normales!

<u>propriétés ::</u>

Comment calculer des probabilités avec une loi normale?(2)

Mais il n'existe qu'une seule table alors qu'il existe un nombre infini de variables normales!

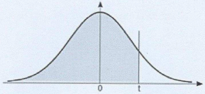
<u>propriétés ::</u>

- Soit X une variable normale de paramètres μ et σ^2. Alors $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est une variable normale standard (d'espérance 0 et de variance 1)
- Soit X une variable normale standard, soit μ et $\sigma^2 > 0$. Alors $Y = \mu + \sigma.X$ est une variable normale de paramètres μ et σ^2.

Comment calculer des probabilités avec une loi normale?(3)

A quoi ressemble la table?

Table donnant P(Z<t) pour une variable aléatoire suivant N(0,1)



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830

Exercices

<u>Exercice :</u>

1. Soit X une variable normale standard. Calculer:
   - $P(X \leq 1.47)$
   - $P(X \geq 0.52)$
   - $P(X < -0.43)$
   - $P(-1.24 \leq X \leq 0.77)$
2. Soit X une variable normale standard. Déterminer t tel que :
   - $P(X \leq t) = 0.95$
   - $P(X \leq t) = 0.1$
   - $P(-t \leq X \leq t) = 0.95$
3. Soit X une variable normale de paramètres $\mu = 2$ et $\sigma^2 = 4$. Calculer:
   - $P(X \leq 3.2)$
   - $P(X \geq 2.6)$
   - $P(X < 1.4)$
   - $P(1.8 \leq X \leq 2.5)$

Quelques inégalités classiques

- inégalité de Markow :
  Soit X une variable aléatoire positive qui admet une espérance.

$$\text{pour tout} \lambda > 0, \; P(X > \lambda . \mathbb{E}[X]) \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{ou} \quad P(X > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$$

Quelques inégalités classiques

- inégalité de Markow :
  Soit X une variable aléatoire positive qui admet une espérance.

$$\text{pour tout} \lambda > 0,\ P(X > \lambda.\mathbb{E}[X]) \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{ou} \quad P(X > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$$

- Généralisation:

$$\text{pour tout} \lambda > 0,\ P(|X|^k > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^k]}{\lambda} \quad \text{or} \quad P(|X| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^k]}{\epsilon^k}$$

Quelques inégalités classiques

- inégalité de Markow :
  Soit X une variable aléatoire positive qui admet une espérance.

$$\text{pour tout} \lambda > 0, \; P(X > \lambda.\mathbb{E}[X]) \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{ou} \quad P(X > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$$

- Généralisation:

$$\text{pour tout} \lambda > 0, \; P(|X|^k > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^k]}{\lambda} \quad \text{or} \quad P(|X| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^k]}{\epsilon^k}$$

- Inégalité de Bienayme-Tchebichev :
  Soit X une variable aléatoire qui admet une variance

$$\text{pour tout} \epsilon > 0, \; P(|X - \mathbb{E}[X]| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\epsilon^2}$$

Utilisation de ces inégalités

On lance un dé équilibré à 6 faces. On considère l'événement: “la proportion d'apparition du 6 est comprise entre $1/6$-0.01 et $1/6+0.01$.

Combien de lancers doit on au minimum réaliser pour pouvoir affirmer cet événement avec une probabilité d'au moins 95%?

distribution de (X, Y)

Soit X et Y deux variables variables.
On considère le vecteur (X, Y) et l'on veut connaître sa distribution.

distribution de (X, Y)

Soit X et Y deux variables variables.
On considère le vecteur (X, Y) et l'on veut connaître sa distribution.

- Cas discret:
  pour tout$i \in X(\Omega)$, pour tout$j \in Y(\Omega)$, $P(X = i, Y = j)$,

distribution marginale

Quand on considère un vecteur aléatoire (X, Y) les distributions marginales sont la distribution de X et la distribution de Y.

- cadre discret:
  $\forall i \in X(\Omega),\ P(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X = i, Y = j)$
  $\forall j \in Y(\Omega),\ P(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i, Y = j)$

Exemple

Soit le vecteur (X, Y) défini par :

X /Y	-1	1
-1	1/10	3/10
1	5/10	1/10

Les distributions marginales sont :

k	-1	1
P(X=k)	4/10	6/10

k	-1	1
P(Y=k)	6/10	4/10

Indépendance

<u>Définition:</u>
Soit X et Y deux variables aléatoires.
On dit que X et Y sont indépendants si :

$$\text{pour tout,} \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A).P(Y \in B)$$

Indépendance

Propriétés :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. La définition précédente est équivalente à :

- Cas discret: pour tout $i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)$, $P(X = i, Y = j) = P(X = i).P(Y = j)$

Exercices

Exercice :

Soit le vecteur aléatoire (X, Y) défini par :

X /Y	0	1	
-1	a	2.a	a
0	0	a	a
1	3.a	0	a

1. quel doit être la valeur de a?
2. Quelles sont les distributions marginales ?
3. Est ce que X et Y sont indépendantes?