

Variables aléatoires et dénombrement

Exercice 1:

On considère un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire égale au chiffre qui apparaît sur la face supérieure. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Soit $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 2:

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, a\}$ avec $a \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}[X] = 6$. Quelle est la valeur de a ?

Exercice 3:

A et B sont deux avions ayant respectivement 2 et 4 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié des moteurs tombent en panne. En fonction de la valeur de p , quel avion choisissez vous?

Exercice 4:

Un restaurateur accueille chaque soir 70 clients. Il sait qu'en moyenne, deux clients sur cinq prennent une crème brûlée. Il pense que s'il prépare 30 crèmes brûlées, dans plus de 70% des cas, la demande sera satisfaite.

1. le restaurateur a t'il raison?
2. combien de crèmes brûlées doit il préparer pour satisfaire la demande dans au moins 90% des cas?

Exercice 5:

Une urne contient 3 sortes de boules de poids différents : 7 boules de 1kg, 5 boules de 3kg et 3 boules de 5kg.

On tire une boule au hasard de l'urne et on note X son poids.

1. Déterminer la loi de X
2. Calculer l'espérance et la variance de X

Exercice 6:

Pour aller à son lycée à vélo, un étudiant rencontre 6 feux. L'état de chaque feu est indépendant des autres et la probabilité qu'un feu soit vert est $2/3$. Un feu rouge ou orange fait perdre 1 minute et 30 secondes à l'étudiant. Le lycée est situé à 3km et l'étudiant roule à 15km/h entre les feux.

Soit X le nombre de feux verts rencontrés sur le trajet et T le temps mis par l'étudiant pour faire le trajet.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Exprimer T en fonction de X . Calculer $\mathbb{E}[T]$.
3. L'étudiant part 17 minutes avant le début des cours. est-il raisonnable de penser qu'il arrivera à l'heure? Quelle est la probabilité pour qu'il arrive en retard?

Exercice 7:

Soit le jeu suivant : on lance 3 dés. Pour jouer il faut donner 1 euro.

Si 3 six apparaissent, le joueur reçoit 36 euros, si 2 six apparaissent le joueur reçoit 7 euros, si 1 six apparaît le joueur reçoit 1 euros et dans tous les autres cas, le joueur ne reçoit rien.

Soit X la variable égale à la somme du joueur après un jeu.

1. Déterminer la loi de X
2. Le jeu est-il équitable?
3. Soit $Y = 3.X + 20$. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
4. Soit $Z = X^2$. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 8:

Soit X un variable aléatoire définie par :
$$P(X = k) \begin{cases} k & \begin{cases} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 0.2 & 0.05 & a & 0.4 \end{cases} \end{cases}$$

1. Quelle doit être la valeur de a pour avoir une loi de probabilité?
2. Calculer l'espérance et la variance de X
3. Soit $Y = -2.X + 5$. Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
4. Soit $Z = X^2$. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice 9:

Une loterie comporte 20 billets dont 2 gagnants, l'un pour un lot de 100 euros et le second pour un lot de 60 euros. On a acheté 3 billets.

1. Calculer les probabilités suivantes :
 - (a) gagner les 2 lots
 - (b) gagner uniquement le lot de 100 euros
 - (c) gagner uniquement le lot de 60 euros
 - (d) ne rien gagner
2. Déterminer la loi de la variable X qui a tout ensemble de 3 billets associe la somme gagnée.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$
4. Le prix de vente du billet est fixé à $\mathbb{E}[X]/3$. Vérifier que la vente des billets permet d'obtenir la somme mise en jeu.

Exercice 10:

Une course oppose 20 concurrents dont Emilie.

1. Combien y a t'il de podiums possibles?
2. Combien y a t'il de podiums possibles avec Emilie première?
3. Combien y a t'il de podium où Emilie figure?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y a t'il de distributions de récompenses possibles?

Exercice 11:

On tire 3 cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de :

1. n'obtenir que des coeurs?
2. n'obtenir que des as?
3. n'obtenir que deux coeur et un pique?