Chapitre 2 : Probabilité

Vocabulaire

On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude.

On note Ω l'univers qui est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

On suppose cet ensemble connu

On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p\}$

- $\{\omega_i\}$: événement élémentaire
- une partie de Ω est appelée un événement

propriétés de $\mathcal{P}(\Omega)$

- $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$; Ω est l'événement certain
- soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$

  en particulier $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\emptyset$: événement impossible
- soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$

  alors $A \cup B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $A \cap B \in \mathcal{P}(\Omega)$

  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- soit $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

opérations sur les événements

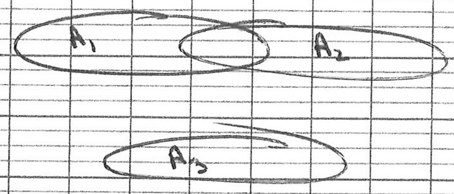
- $A \subset B$: la réalisation de A implique celle de B
- $A \cup B$: il se produit au moins un des deux événements
- $A \cap B$: cet événement se réalise si A et B sont tous les deux réalisés

soit A et B deux parties disjointes. Alors $A \cap B = \emptyset$.

On dit que les événements A et B sont incompatibles

- Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système d'événements.
  On dit que les (A_i) sont globalement incompatibles si $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$.

(!) si les A_i sont deux à deux incompatibles alors ils sont globalement incompatibles. La réciproque est fausse.



Probabilité

On considère une expérience aléatoire et son univers Ω.
Une probabilité est une application qui à un événement associe un nombre qui mesure les chances de réalisation de cet événement.

$$p : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$A \longrightarrow p(A) \in [0,1]$$

Cette application doit satisfaire:
- $p(\Omega) = 1$
- si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Rq: le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est probabilisé par la donnée de p.

propriétés

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A) + p(\bar{A}) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
- $A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Rq: si $(A_i)_i$ des événements incompatibles 2 à 2
$$p\left(\bigcup A_i\right) = \sum p(A_i)$$

Ensemble fini probabilisé

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

On définit une probabilité sur Ω par la donnée de $p(\{\omega_i\})$ avec :

- $p(\{\omega_i\}) \geq 0$

- $\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\}) = 1$

On dit que l'on a équiprobabilité sur Ω si :

$$p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = \ldots = p(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

Dans ce cas :

pour tout événement A, $p(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

Ensemble infini dénombrable probabilisé

On dit qu'un ensemble Ω est dénombrable infini s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ dans Ω. De ce fait Ω peut s'écrire sous la forme

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$$

On définit une probabilité p sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en attribuant à chaque ω_i une probabilité $p(\{\omega_i\})$ telle que $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} p(\{\omega_i\}) = 1$

probabilité conditionnelle

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$.

Soit A un événement de probabilité non nulle.

On considère l'application p_A définie par :

$$p_A : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$X \longrightarrow p_A(X) = \frac{p(A \cap X)}{p(A)}$$

- p_A est une probabilité

- $p_A(X)$ encore notée $p(X|A)$ est la probabilité conditionnelle de X sachant A.

Rq : soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

$$p(A \cap B) = p(A|B) \times p(B)$$
$$= p(B|A) \times p(A)$$

soit A, B, C trois événements tq $p(A) \neq 0$ et $p(A \cap B) \neq 0$

$$p(A) \times p(B/A) \times p(C|A \cap B) = p(A \cap B \cap C)$$

Indépendance en probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé.

Soit A, B deux événements de Ω.

A et B sont dits indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Rq : si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A) = p(A|B) \Leftrightarrow p(B) = p(B|A)$

Rq : trois événements sont dit globalement indépendants en probabilité s'ils sont deux à deux indépendants en probabilité

Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé.

Soit $B_1, \ldots, B_n$ un système complet d'événements deux à deux incompatibles. (si $i \neq j$ $B_i \cap B_j = \emptyset$ et $\bigcup_i B_i = \Omega$)

$$p(B_i | A) = \frac{p(B_i) \times p(A|B_i)}{\sum_j p(B_j) \times p(A|B_j)}$$