TD2

Exercice 1
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé.
Soit A, B deux événements de Ω. Prouver les résultats suivants :

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A) + p(\bar{A}) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
- $A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exercice 2
On mesure les longueurs des boulons d'une certaine boîte de 100.
On obtient les résultats suivants :

Longueur en cm	[4;4.2[	[4.2,4.4[	[4.4,4.6[	[4.6,5[
Effectifs	17	24	51	8

On tire au hasard un boulon. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. Le boulon mesure moins de 4.2 cm
2. Le boulon mesure plus de 4.4 cm

Un boulon est utilisable si sa longueur est comprise entre 4.2 et 4.6 cm.

1. Quelle est la probabilité qu'un boulon soit utilisable?
2. On achète 50 boîtes de 100 boulons. Combien peut-on espérer de boulons utilisables?

Exercice 3
Deux ateliers, notés respectivement A et B, d'une même entreprise produisent chaque jour 1000 et 800 puces électroniques d'un même modèle.
2% des pièces produites par l'atelier A et 3% des pièces produites par l'atelier B sont défectueuses.

1. Compléter le tableau suivant qui décrit la production journalière :

	Nombre de pièces défectueuses	Nombre de pièces non défectueuses	Total Total
Nombre de pièces produites par l'atelier A			
Nombre de pièces produites par l'atelier B			
Total			1800

2. Un jour donné, on choisit au hasard une puce parmi les 1800 puces produites par les deux ateliers. On suppose être dans une situation d'équiprobabilité.
   On considère les événements suivants :
   - A : "la puce choisie provient de l'atelier A"
   - B : "la puce choisie provient de l'atelier B"
   - D : "la puce choisie est défectueuse"
   - $\bar{D}$: "la puce choisie n'est pas défectueuse"

   Déterminer exclusivement à l'aide du tableau précédent les probabilités suivantes :
   (a) $p(D)$, $p(A \cap D)$, $p(A|D)$
   (b) $p(\bar{D})$, $p(B \cap \bar{D})$, $p(B|\bar{D})$
3. Vérifier que $p(A \cap D) = p(A|D) * p(D)$ et que $p(B \cap \bar{D}) = p(B|\bar{D}) * p(\bar{D})$

Exercice 4
Dans un lot de pièces fabriquées, il y 3% de pièces défectueuses. Le mécanisme de contrôle des pièces est aléatoire. Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0.96 et si elle est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 0.98. Calculer les probabilités suivantes :

1. p_0 : pour qu'une pièce mauvaise soit mauvaise et acceptée
2. p_1 : pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle
3. p_2 : pour qu'une pièce soit acceptée
4. p_3 : pour qu'une pièce soit mauvaise, sachant qu'elle est acceptée

Exercice 5
Monsieur et Madame A ont quatre enfants. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon est la même que celle d'une fille. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Monsieur et Madame A ont quatre filles
2. Monsieur et Madame A ont trois filles et un garçon
3. Monsieur et Madame A ont deux filles et deux garçons
4. Monsieur et Madame A n'ont pas de fille
5. Monsieur et Madame A ont au moins une fille
6. Monsieur et Madame A ont au moins une fille et un garçon

Exercice 6
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé
Soit $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tels que :

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad p(B) = \frac{1}{2} \quad p(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

Calculer $p(A \cup B)$, $p(\bar{A})$, $p(\bar{B})$, $p(\bar{A} \cap B)$, $p(\bar{A} \cup B)$, $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

Exercice 7
Une urne contient cinq boules : trois rouges numérotées de 1 à 3 et deux noires numérotées de 1 à 2.
On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Les tirages sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité de l'événement A : “les deux boules tirées sont de la même couleur”?
2. Quelle est la probabilité de l'événement B : “la somme des numéros portés sur chacune des deux boules tirées est égale à 3”?
3. Quelle est la probabilité de B sachant que A est réalisé?

Exercice 8
Dans un jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 3 cartes.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles
2. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) le tirage contient le roi de coeur
   (b) le tirage contient un roi exactement
   (c) le tirage contient un coeur exactement
   (d) le tirage contient deux coeurs dont le roi
   (e) le tirage contient au moins un coeur
   (f) le tirage contient exactement deux coeurs et exactement un roi

Exercice 9
On tire trois boules d'un sac contenant 9 boules : 4 vertes, 3 rouges, 1 blanche et 1 noire.

1. On suppose que les tirages se font successivement avec remise
   (a) le tirage contient 3 boules vertes
   (b) le tirage ne contient aucune boule rouge
   (c) le tirage contient 3 boules blanches
   (d) le tirage contient dans cet ordre : 2 boules vertes et 1 boule rouge
   (e) le tirage contient 2 boules vertes et 1 boule rouge
   (f) le tirage contient 1 verte, 1 rouge et 1 noire

2. mêmes questions si on suppose que les tirages sont successifs sans remise
3. mêmes questions si on suppose que les tirages sont simultanés.