Université de Nice – Sophia Antipolis
Faculté des Sciences
Licence SM–MP

Corrigé exercice TD4 – III

Retrouver l'équation du mouvement en utilisant le théorème de la résultante dynamique et celui du moment dynamique:

- Th. moment dynamique:

$$(I_G)_z \ddot{\theta} \hat{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_G(\vec{T}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_G(\vec{N}) = \overrightarrow{GI} \wedge (\vec{T} + \vec{N})$$

(point de calcul du moment de la force: G. Point d'applications des forces: I. La force de gravité ne contribue pas car sont point d'application est G).

On note: $\vec{T} = T\hat{x}$, $\vec{N} = N\hat{y}$.

On a $\overrightarrow{GI} = -d \sin\theta \hat{x} + (d\cos\theta - R)\hat{y}$.

Donc: $\overrightarrow{GI} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) = (-dN\sin\theta - T(d\cos\theta - R))\hat{z}$.

Finalement:

$$(I_G)_z \ddot{\theta} = -dN\sin\theta - T(d\cos\theta - R). \tag{1}$$

- Th. résultante dynamique:

$$m\vec{a}_G = \vec{T} + \vec{N} - m\vec{g}.$$

En composantes:

$$\begin{aligned} \text{Axe}\, x : \; m\ddot{x}_G &= T, \qquad (2) \\ \text{Axe}\, y : \; m\ddot{y}_G &= N - mg. \end{aligned}$$

En TD on a trouvé que $\dot{x}_G = (d\cos\theta - R)$ et $\dot{y}_G = d\sin\theta$. En dérivant une fois par rapport au temps, on trouve:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= \ddot{\theta}(d\cos\theta - R) - \dot{\theta}^2 d\sin\theta, \\ \ddot{y}_G &= \ddot{\theta} d\sin\theta - \dot{\theta}^2 d\cos\theta. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2):

$$\ddot{x}_G = \ddot{\theta}(d\cos\theta - R) - \dot{\theta}^2 d\sin\theta = \frac{T}{m} \tag{3}$$

$$\ddot{y}_G = \ddot{\theta} d\sin\theta - \dot{\theta}^2 d\cos\theta = \frac{N}{m} - g \tag{4}$$

En isolant T à partir de l'équation (3) et N à partir de l'équation (4), et en introduisant le résultat dans l'équation (1), on trouve l'équation du mouvement (utiliser que $(I_G)_z = m(R^2/2 - d^2)$).

FORMULAIRE

- Composition des vitesses: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$, A, B des points du solide.
- Moments d'inertie: $I_x = \int_S (y^2 + z^2)\, dm$, $I_y = \int_S (x^2 + z^2)\, dm$ et $I_z = \int_S (x^2 + y^2)\, dm$, où S est le solide.
- Premier théorème de König: $\vec{L}_P = M\overrightarrow{PG} \wedge \vec{v}_G + \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$ (si P point fixe: $\vec{L}_P = \mathbb{I}_P \cdot \vec{\omega}$).
- Deuxième théorème de König: $E_c = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$ (si P point fixe: $E_c = \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_P \cdot \vec{\omega}$).
- Théorème du moment dynamique: $d\vec{L}_P/dt = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_P(\vec{F}_i^{ext}) - M\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G = \sum_i \overrightarrow{PA_i} \wedge \vec{F}_i^{ext} - M\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G$ où A_i est le point d'application de la force extérieure $\vec{F}_i^{ext}$ (si $P = G$ ou P point fixe alors $\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G = \vec{0}$).