Université de Nice – Sophia Antipolis
Faculté des Sciences
Licence SM–MP

Contrôle Mécanique II

partie mécanique du solide

26 octobre 2010

$\boxed{\text{DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS}}$

DURÉE: UNE HEURE TRENTE

On considère une barre AB homogène de longueur ℓ et de masse m, posée sur les deux faces d'un dièdre droit d'arête horizontale $O'x'$ et verticale $O'y'$.

A.- ÉTUDE DE LA MATRICE D'INERTIE

1. Calculer la matrice d'inertie selons la base $Gxyz$ (l'axe z étant perpendiculaire à la surface du papier). Si des élément de la matrice sont nuls, expliquer pourquoi.

B.- ÉTUDE DE LA CINÉMATIQUE

On suppose que, sous l'effet de la gravité, la barre commence à glisser *sans frottement* sur le plan vertical $O'y'z'$. À tout moment, les extrémités de la barre A et B restent en contact avec les axes $O'y'$ et $O'x'$ respectivement.

1. Combien de degrés de libertés présente la barre? Écrire le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$.

2. Calculer la position du centre de masse G. Exprimer le résultat dans la base $O'x'y'z'$. Dessiner la trajectoire de G lorsque la barre glisse. Montrer qu'elle correspond à un cercle de centre $(x' = 0, y' = 0)$ et rayon $\ell/2$.

3. Par dérivation par rapport au temps de $\overrightarrow{O'G}$, vérifier que

$$\vec{v}_G = \dot{\theta}\frac{l}{2}(\cos\theta\hat{x}' - \sin\theta\hat{y}').$$

4. En utilisant la loi de compositions des vitesses (FORMULAIRE, 1), calculer $\vec{v}_B$ à partir de $\vec{v}_G$.

.

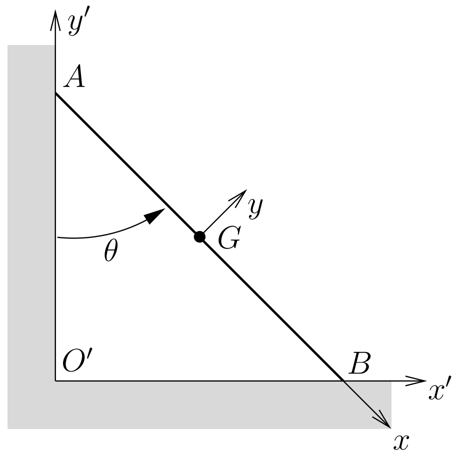
T. S. V. P. $\longrightarrow$

C.- ÉTUDE DE LA CINÉTIQUE

1. Calculer l'énergie cinétique $E_c(\theta)$ de la barre.
2. Calculer l'énergie potentielle $U(\theta)$ de la barre.
3. En utilisant le *Théorème de la conservation de l'énergie mécanique*, calculer l'équation du mouvement du système, qui relie $\ddot{\theta}$ et θ.

D.- ÉTUDE DE LA DYNAMIQUE

1. Dessiner les forces qui interviennent dans le système. Utiliser le *Théorème du moment dynamique* et le *Théorème de la résultante dynamique* pour retrouver les équations du mouvement.



FORMULAIRE

1. Composition des vitesses: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$, A, B des points du solide.
2. Moments d'inertie: $I_x = \int_S (y^2 + z^2)\, dm$, $I_y = \int_S (x^2 + z^2)\, dm$ et $I_z = \int_S (x^2 + y^2)\, dm$, où S est le solide.
3. Premier théorème de König: $\vec{L}_P = M\overrightarrow{PG} \wedge \vec{v}_G + \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$ (si P point fixe: $\vec{L}_P = \mathbb{I}_P \cdot \vec{\omega}$).
4. Deuxième théorème de König: $E_c = \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$ (si P point fixe: $E_c = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_P \cdot \vec{\omega}$).
5. Théorème du moment dynamique: $d\vec{L}_P/dt = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_P(\vec{F}_i^{ext}) - M\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G = \sum_i \overrightarrow{PA_i} \wedge \vec{F}_i^{ext} - M\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G$ où A_i est le point d'application de la force extérieure $\vec{F}_i^{ext}$ (si $P = G$ ou P point fixe alors $\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G = \vec{0}$).