

TD 3 Éléments cinétiques d'un solide

I – 1. Une barre homogène $O'A$ de longueur ℓ , de masse M (Fig. 1, en haut à gauche), tourne avec la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical $O'z'$ en restant dans le plan horizontal.

- Quel est le vecteur rotation instantané du mouvement ? En déduire la résultante cinétique \mathbf{P} de la barre.
- Établir la matrice d'inertie du solide par rapport à un référentiel approprié au solide.
- En déduire le moment cinétique en O' et l'énergie cinétique du solide.

2. Mêmes questions si la barre fait un angle α quelconque (mais constant) avec la verticale (Fig. 1, en haut à droite).

3. Mêmes questions pour une plaque homogène, de masse m , ayant la forme d'un triangle rectangle tournant autour de $O'H$ avec la vitesse angulaire ω

II — (*Extrait de l'épreuve de Septembre 2005*)

On se propose d'étudier le mouvement d'un cylindre plein, de rayon r , d'axe Cz et de masse M , roulant sans glisser au fond d'une cavité cylindrique d'axe $O'z$ et de rayon $R > r$.

1. En vous servant du «solide» $O'C$ et de son vecteur instantané de rotation $\omega_{O'C}$, calculer la vitesse \mathbf{v}_C du point C , puis son accélération \mathbf{a}_c (projection sur $Cxyz$).
2. Établir l'expression du moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe C_z .
3. Décrire très précisément les degrés de libertés du cylindre et en déduire son vecteur instantané de rotation ω , ainsi que la relation de roulement sans glissement.
4. Calculer l'énergie cinétique du cylindre en fonction de $\dot{\theta}$.

III On étudie un cône plein, homogène, de hauteur h , de rayon R et de masse volumique ρ . On notera α son 1/2 angle au sommet (Fig. 1, en bas à gauche).

1. Calcul des éléments d'inertie de ce solide :
 - Rappeler la position du centre d'inertie du cône (que nous appellerons G).
 - Établir sa matrice d'inertie par rapport à O' .
2. Étude d'un mouvement : On pose le cône sur un plan horizontal fixe $x'O'y'$ et on étudie son mouvement de roulement sur ce plan, le sommet O' restant fixe (Fig. 1, en bas à droite).
 - Rappeler l'expression du vecteur de rotation instantané, et en déduire la vitesse de G .

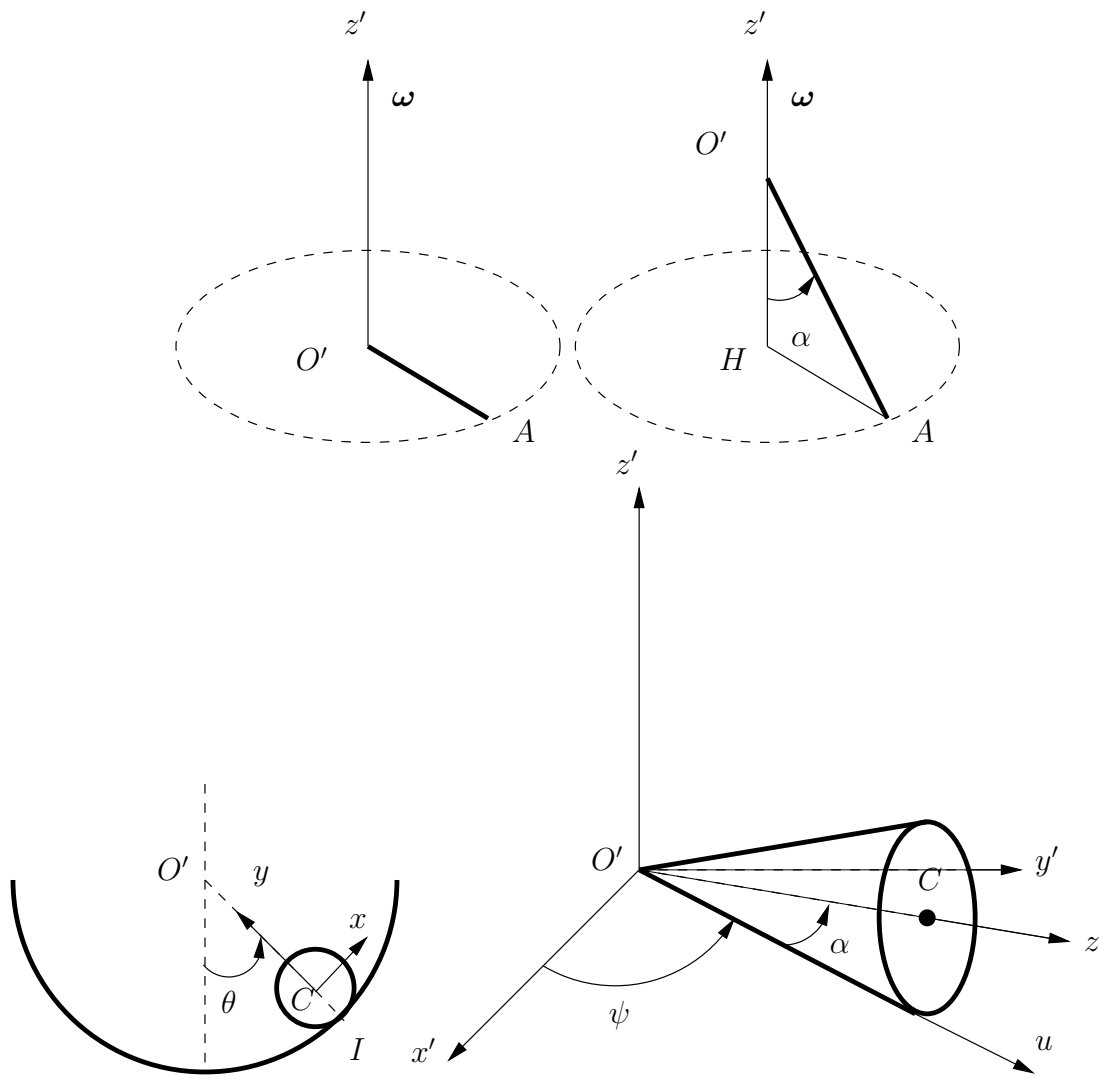


FIGURE 1 – Figures correspondant aux exercices.

- Soit I un point du solide en contact avec le sol (sur l'axe $O'u$). Si le roulement se fait sans glissement, établir la relation liant les différents paramètres de position.
- Calculer la quantité de mouvement, le moment cinétique en O' , et l'énergie cinétique du solide.