Université de Nice – Sophia Antipolis
Faculté des Sciences
Licence L2SF–L2PC Mécanique II
Année 2012–2013

TD 4 Dynamique du solide

I – 1. On étudie le mouvement d'un cylindre plein, homogène, de rayon R, de hauteur h et de masse m, laché sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (Fig. 1 en haut à gauche).

1. Le cylindre peut rouler sans glisser sur son support (vitesse linéaire v, vitesse angulaire $\dot{\theta}$). Quel est son vecteur de rotation instantané : s'il ne fait que glisser ? s'il ne fait que rouler ? s'il roule et glisse en même temps ?
2. On suppose que le cylindre *roule sans glisser* sur le plan incliné. Exprimer la condition de roulement sans glissement et en déduire la relation entre l'accéleration linéaire $\mathbf{a}$ et l'accelération angulaire $\ddot{\theta}$ du cylindre.
3. Écrire la loi fondamentale de la dynamique ainsi que le théorème du moment dynamique et en déduire l'accélération $\mathbf{a}$ du cylindre.
4. Exprimer en fonction de la position et de la vitesse v de l'axe du cylindre, son énergie cinétique puis son énergie potentielle ; retrouver alors l'accéleration en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.
5. On suppose maintenant que le cylindre *glisse sans rouler* sur le plan incliné (coefficient de frottement négligeable). Reprendre la question précedente. Quelle est dans ce cas la nouvelle accéleration $\mathbf{a}'$. Dans quel cas le cylindre arrive-t'il plus vite en bas de la pente ?

II Un gyroscope simplifié est constitué d'un disque de masse m, de rayon R et de centre C, et de son axe CO de longueur ℓ et de masse négligeable (Fig. 1 en haut à droite). On le lance à grande vitesse angulaire $\dot{\theta}$, puis, son axe étant horizontal, on suspend son extrémité O' à un point fixe. On observe que l'axe OC commence à tourner (précesser) autour de $O'z$ avec une vitesse angulaire ψ (vitesse de précession).

1. Déterminer dans le repère $(O'uvz)$ les composantes du vecteur rotation instantané $\mathbf{\Omega}$ du gyroscope.
2. Utiliser le théorème du moment dynamique pour trouver la relation existant entre les vitesses angulaires.

III (*Épreuve de mars 2006*) On étudie un demi-disque homogène de centre C, de rayon R et de masse m (Fig. 1 en bas à gauche).

1. Calcul des élements d'inertie du solide :
   – Déterminer les coordonnées de son centre d'inertie G (par la suite on notera d la distance CG).

- Calculer son moment d'inertie I_{CZ} par rapport à l'axe CZ perpendiculaire au plan $Cx'y'$, puis son moment d'inertie I_{GZ} par rapport à l'axe Gz' parallèlle à cz' passant par G. Que peut-on dire des produits d'inertie par rapport à Gx', Gy', Gz' ? (Justifier chaque réponse). Écrire la matrice d'inertie en G du solide.

2. Étude du mouvement : On pose le demi-disque verticalement sur un plan horizontal fixe et on étudie son mouvement de roulement sans glissement sur l'axe Ox' (Fig. 1 en bas à droite).
   - La position du solide est déterminé par l'abcisse x' de son centre C et par l'angle $\theta = (CI, CG)$. Quel est le vecteur instantané de rotation de ce mouvement ? Écrire la condition de roulement sans glissement et en déduire la relation entre $\dot{x}'$ et $\dot{\theta}$.
   - Établir en fonction de θ et $\dot{\theta}$ les composantes (dans $Ox'y'$) de la vitesse $\mathbf{v}_G$ du centre de masse.
   - Montrer que l'énergie cinétique du solide s'écrit $E_c = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{2d}{R}\cos\theta\right)$.
   - Donner l'expression de son énergie potentielle $U(\theta)$ et de son énergie mécanique E.
   - Représenter sur un dessin les forces extérieures qui agissent sur le solide. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique de ce solide est consevée au cours du temps. En déduire l'équation du mouvement (équation différentielle liant $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ et θ). Si on se restrein aux petites oscillations autour de la position d'équilibre (θ et $\dot{\theta}$ «petits»), déterminer la période de ces petites oscillations.
   - Retrouver léquation du mouvement en utilisant le théorème de la résultante dynamique et celui du moment dynamique.

IV (*Épreuve de juin 2005*) Le pendule elliptique est un pendule pesant dont l'articulation A peut se déplacer sans frottement sur un axe horizontal Ox'. On s'intéresse à son mouvement dans le plan vertical $x'O'y'$ (Fig. 2).

1. Étude des élements d'inertie : Le pendule est constitué d'une barre homogène de masse m et de longueur $AB = 2\ell$. déterminer la matrice d'inertie de cette barre dans le repère $Guvz$. Si certains élements sont nuls, en donner la justification.
2. Étude cinématique : Donner le nombre de degés de libertés du pendule et son vecteur rotation instantané.
3. Étude du mouvement : On lâche le pendule sans vitesse initiale à partir d'une position $\theta_0 \neq 0$ (on note x'_0 l'abcisse initiale de G). La base AB oscille et le point a est mobile sans frottement sur Ox'.
   - Dessiner les forces appliquées à la barre et écrire le théorème de la résultante dynamique.
   - En déduire que le centre de masse G évolue le long d'une droite verticale fixe. Donner en fonction de θ, les coordonnées x_G, y_G de G ; en déduire en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ les composantes de sa vitesse et de son accéleration.
   - En vous servant de la relation de Chasle $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GB}$, écrire les coordonnés x', y' de B en fonction de θ ; en déduire que la trajectoire de ce point est une ellipse (d'où le nom de pendule). Où est situé son centre C ? Dessinez l'allure de cette ellipse.
   - Établir l'expression de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle U du pendule. Utiliser le theorème de la conservation de l'énergie mécanique pour trouver

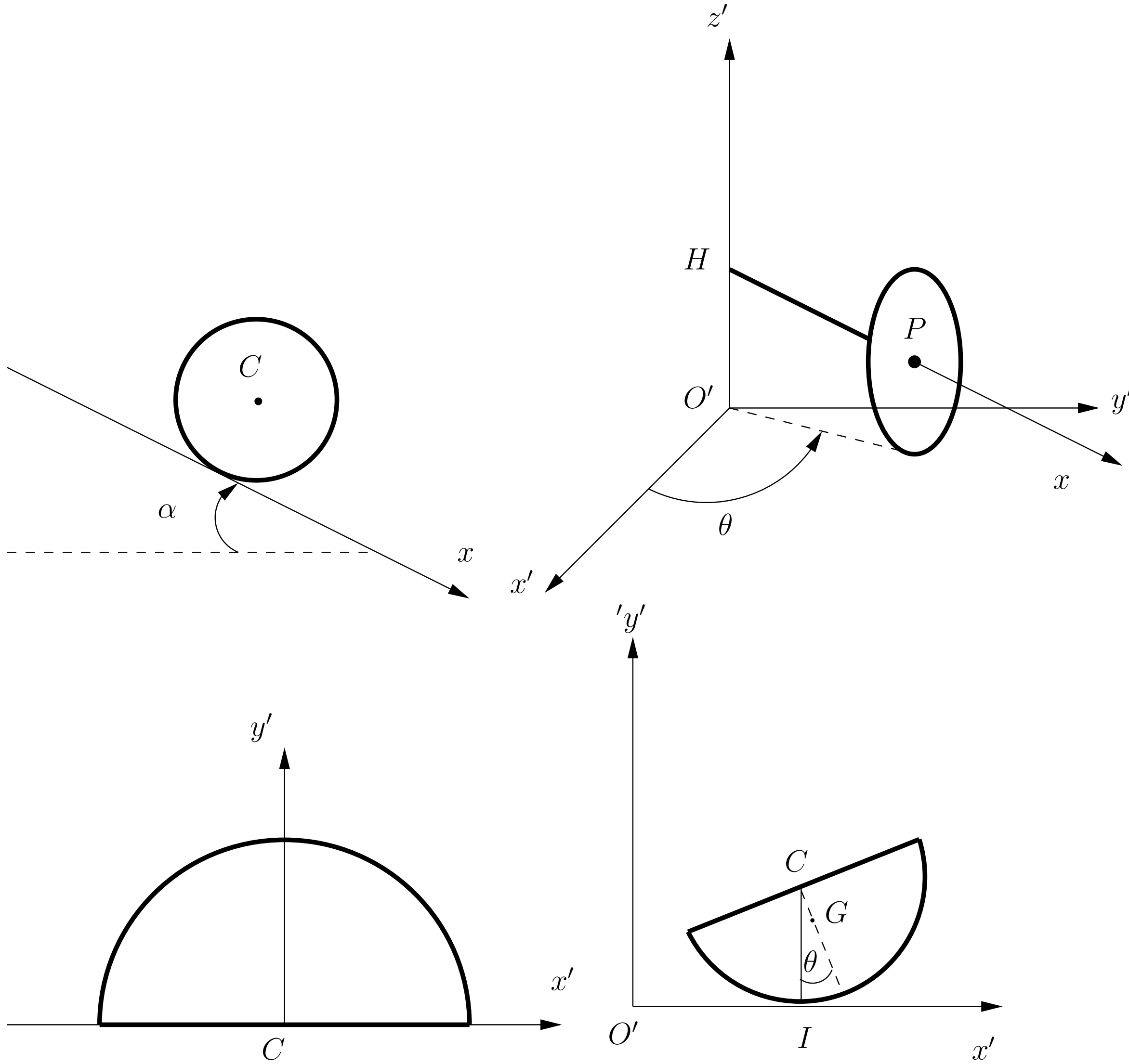

FIGURE 1 – Figures correspondant aux exercices.

l'équation différentielle de son mouvement angulaire. Si on se restreint aux petites oscillations (θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ petits), quelle est la periode des oscillations ?

On rappelle qu'en coordonnés cartésiennes, l'équation d'une ellipse de centre $C(x_0, y_0)$ est : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, où a et b sont des constantes.

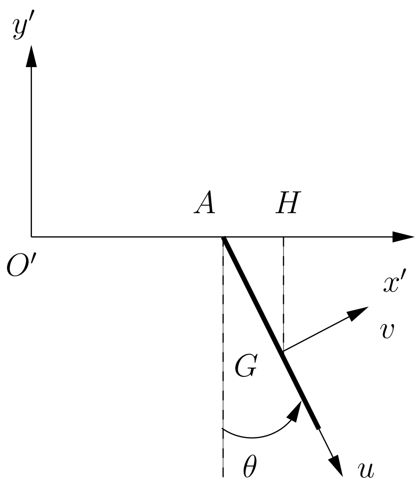

FIGURE 2 – Figures correspondant aux exercices.