

MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINES : PARTIE II

par

Christophe BESSE

Institut Mathématique de Toulouse, Université Toulouse 3, CNRS

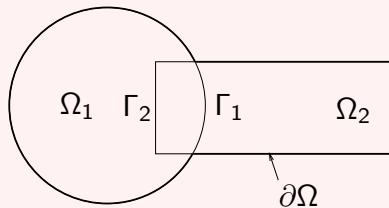
DDM - Partie II



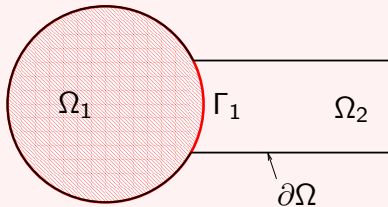
- 1 RAPPELS
- 2 HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE RELAXATION D'ONDES
- 3 LA MÉTHODE SWR
- 4 PROPRIÉTÉS
- 5 DÉVELOPPEMENTS
- 6 MISE EN ŒUVRE

- 1 RAPPELS
- 2 HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE RELAXATION D'ONDES
- 3 LA MÉTHODE SWR
- 4 PROPRIÉTÉS
- 5 DÉVELOPPEMENTS
- 6 MISE EN ŒUVRE

Solution de l'équation de Laplace sur un domaine général $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



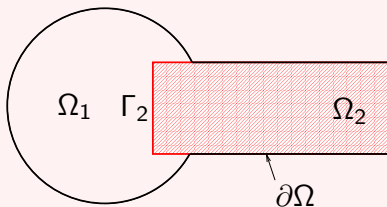
Solution de l'équation de Laplace sur un domaine général $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



$$\begin{aligned} \Delta u_1^1 &= 0 && \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^1 &= g && \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\bar{\Omega}_1 \\ u_1^1 &= u_2^0 && \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

résolu sur le disque avec $u_2^0 = 0$

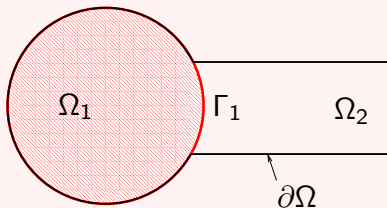
Solution de l'équation de Laplace sur un domaine général $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



$$\begin{aligned} \Delta u_2^1 &= 0 && \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^1 &= g && \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\bar{\Omega}_2 \\ u_2^1 &= u_1^1 && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

résolu sur le rectangle

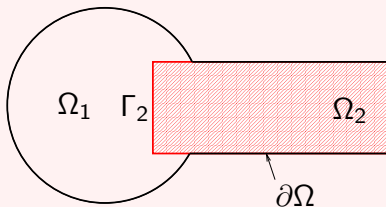
Solution de l'équation de Laplace sur un domaine général $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



$$\begin{aligned} \Delta u_1^2 &= 0 && \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^2 &= g && \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\bar{\Omega}_1 \\ u_1^2 &= u_2^1 && \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

résolu sur le disque

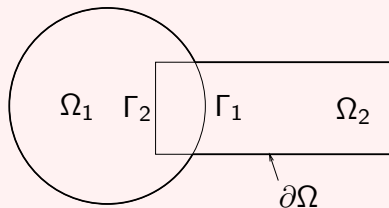
Solution de l'équation de Laplace sur un domaine général $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



$$\begin{aligned} \Delta u_2^2 &= 0 && \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^2 &= g && \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\bar{\Omega}_2 \\ u_2^2 &= u_1^2 && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

résolu sur le rectangle

Solution de l'équation de Laplace sur un domaine général $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



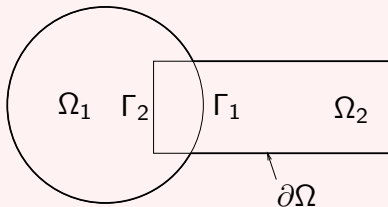
$$\begin{aligned} \Delta u_1^k &= 0 && \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^k &= g && \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\bar{\Omega}_1 \\ u_1^k &= u_2^{k-1} && \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

résolu sur le disque

$$\begin{aligned} \Delta u_2^k &= 0 && \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^k &= g && \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\bar{\Omega}_2 \\ u_2^k &= u_1^k && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

résolu sur le rectangle

Solution de l'équation de Laplace sur un domaine général $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



$$\begin{aligned} \Delta u_1^k &= 0 && \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^k &= g && \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\bar{\Omega}_1 \\ u_1^k &= u_2^{k-1} && \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$


résolu sur le disque

$$\begin{aligned} \Delta u_2^k &= 0 && \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^k &= g && \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\bar{\Omega}_2 \\ u_2^k &= u_1^{k-1} && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

résolu sur le rectangle

- Plusieurs types de conditions de transmission.
- Méthodes avec ou sans recouvrement.
- Bien adapté aux problèmes stationnaires.

Quid des problèmes instationnaires?

- Idée simple : discrétiser la partie temporelle uniformément et appliquer les techniques de Schwarz pour les problèmes stationnaires.
Ex :  Dolean, Nataf, Lanteri (2002) pour Euler.
- Défaut : les pas de temps doivent être les mêmes dans chaque sous domaines.

Autre approche : *Schwarz Relaxation Method (SWR)*.

- 1 RAPPELS
- 2 HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE RELAXATION D'ONDES
- 3 LA MÉTHODE SWR
- 4 PROPRIÉTÉS
- 5 DÉVELOPPEMENTS
- 6 MISE EN ŒUVRE

Émile Picart (1893) : Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires



Les méthodes d'approximation dont nous faisons usage sont théoriquement susceptibles de s'appliquer à toute équation, mais elles ne deviennent vraiment intéressantes pour l'étude des propriétés des fonctions définies par les équations différentielles que si l'on ne reste pas dans les généralités et si l'on envisage certaines classes d'équations.

14. Indiquons une autre méthode pour établir l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires (1). Nous envisageons, comme plus haut, en changeant seulement un peu les notations, le système des n équations du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \dots, w),$$

$$\frac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \dots, w),$$

.....,

$$\frac{dw}{dx} = f_n(x, u, v, \dots, w).$$

Les fonctions f sont des fonctions continues réelles des quantités réelles x, u, v, \dots, w dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \dots, w_0$. Elles sont définies quand x, u, v, \dots, w restent respectivement compris dans les intervalles

$$(x_0 - a, x_0 + a), \quad (u_0 - b, u_0 + b), \quad \dots, \quad (w_0 - b, w_0 + b),$$

Ernest Lindelöf (1894) : *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires*

Extrait

"... La présente étude a pour but de donner une exposition succincte de la méthode d'approximations successives de M. Picard en tant qu'elle s'applique aux équations différentielles ordinaires."

Convergence superlinéaire (Lindelöf 1894)

Sur des intervalles de temps bornés $t \in [0, T]$, les itérés satisfont la borne d'erreur superlinéaire

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^m\| \leq \frac{(CT)^m}{m!} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^0\|$$

où C est une constante positive.

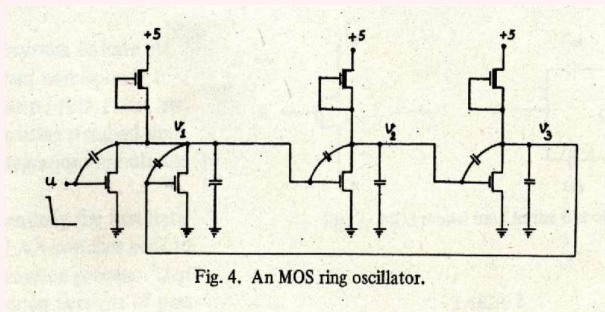
Lelarsmee, Ruehli and Sangiovanni-Vincentelli (1982): The Waveform Relaxation Method for Time-Domain Analysis of Large Scale Integrated Circuits.

"The spectacular growth in the scale of integrated circuits being designed in the VLSI era has generated the need for new methods of circuit simulation. "Standard" circuit simulators, such as SPICE and ASTAP, simply take too much CPU time and too much storage to analyze a VLSI circuit".

Nevanlinna and Odeh (1987): Remarks on the Convergence of Waveform Relaxation Methods.

"Recently an approach called waveform relaxation methods (WR) has captured considerable attention in solving certain classes of large scale digital circuit equations."

Exemple : un oscillateur en anneau MOS (Lelarsmee et al 1982)



Les équations pour un tel circuit peuvent être écrites sous la forme d'un système d'EDO

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= f(\mathbf{v}), & 0 < t < T \\ \mathbf{v}(0) &= \mathbf{g} \end{aligned}$$

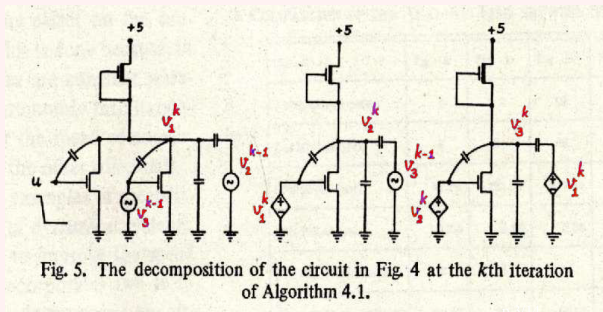
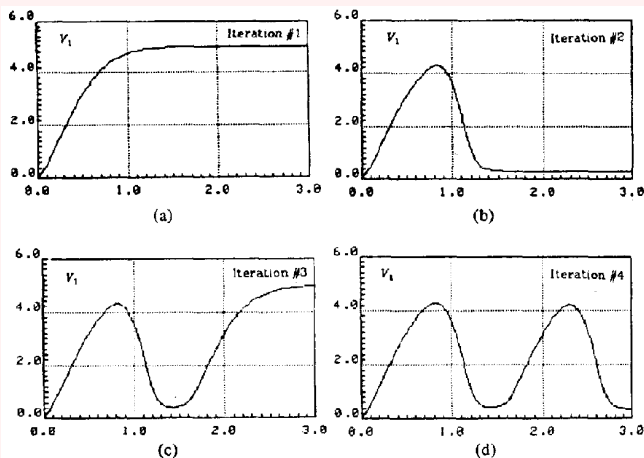


Fig. 5. The decomposition of the circuit in Fig. 4 at the k th iteration of Algorithm 4.1.

Iteration en utilisant les solutions des sous-circuits seulement :

$$\begin{aligned}\partial_t v_1^k &= f_1(v_1^k, v_2^{k-1}, v_3^{k-1}) \\ \partial_t v_2^k &= f_2(v_1^k, v_2^k, v_3^{k-1}) \\ \partial_t v_3^k &= f_3(v_1^k, v_2^k, v_3^k)\end{aligned}$$

Les signaux le long des câbles sont appelés 'waveforms', ce qui donna à l'algo. son nom (anglais) **Waveform Relaxation**.



"Note that since the oscillator is highly nonunidirectional due to the feedback from v_3 to the NOR gate, the convergence of the iterated solutions is achieved with the number of iterations being proportional to the number of oscillating cycles of interest"

- 1 RAPPELS
- 2 HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE RELAXATION D'ONDES
- 3 LA MÉTHODE SWR**
- 4 PROPRIÉTÉS
- 5 DÉVELOPPEMENTS
- 6 MISE EN ŒUVRE

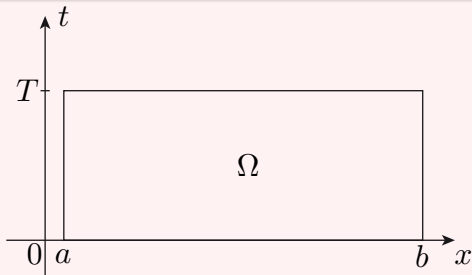
SWR = Schwarz Waveform Relaxation method

BUT : résoudre une équation du type

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f & (x, t) \in \Omega \times (0; T) \\ \text{CL sur } \partial\Omega \text{ (ex : } u=g), & t \in (0; T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{Subdivision } \Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$$

$$\Omega = [a, b] = [a_0, b_0]$$

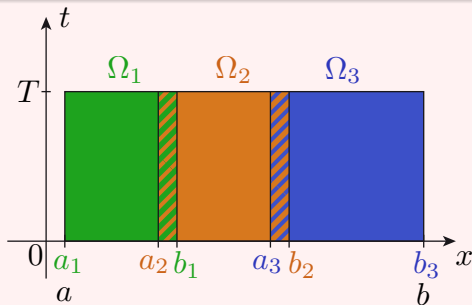


SWR = Schwarz Waveform Relaxation method

BUT : résoudre une équation du type

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f & (x, t) \in \Omega \times (0; T) \\ \text{CL sur } \partial\Omega \text{ (ex : } u=g), & t \in (0; T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Subdivision $\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$
 $\Omega = [a, b] = [a_0, b_0]$

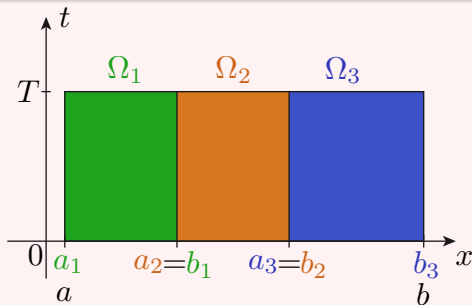


SWR = Schwarz Waveform Relaxation method

BUT : résoudre une équation du type

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f & (x, t) \in \Omega \times (0; T) \\ \text{CL sur } \partial\Omega \text{ (ex : } u=g), & t \in (0; T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Subdivision $\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$
 $\Omega = [a, b] = [a_0, b_0]$



En 1D : $\Omega_j = [a_j, b_j]$, $\Gamma_{j,j-1} = \{a_j\}$ et $\Gamma_{j,j+1} = \{b_j\}$.

MÉTHODE SWR, $k \geq 0$

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t u_i^k + \mathcal{L}u_i^k = f, & (x, t) \in \Omega_i \times (0; T) \\ \mathbb{B}_i u_i^k = \mathbb{B}_i u_j^{k-1}, & (x, t) \in \Gamma_{i,j} \times (0; T), j = i \pm 1 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega_i \end{cases}$$

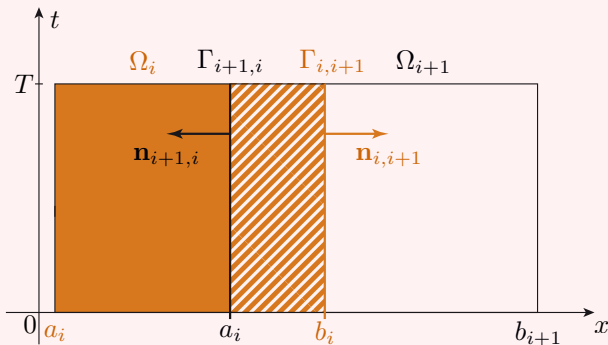
- Si $i = 1$ ou $i = N$, $\Gamma_{1,0} = \{a_0\}$ et $\Gamma_{N,N+1} = \{b_0\}$, alors, la CL est

$$u_0^k = g, (x, t) \in \{a_0\} \times (0; T), \quad u_N^k = g, (x, t) \in \{b_0\} \times (0; T).$$

- Si $k = 0$, $u_i^0 = 0$ (ou aléatoire) sur $\Gamma_{i,j}$, $j = i \pm 1$.

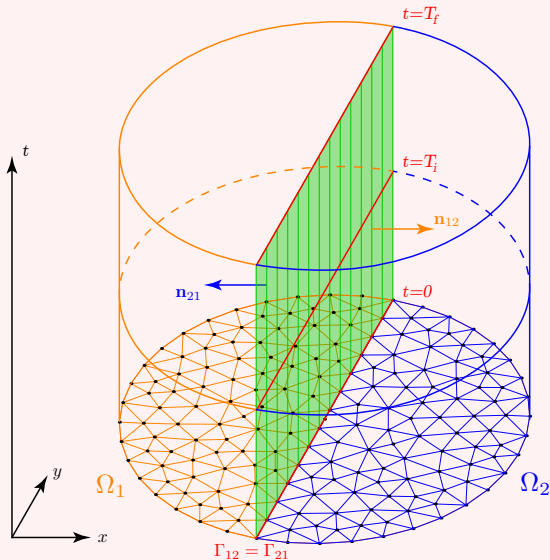
Comme en stationnaire, plusieurs choix

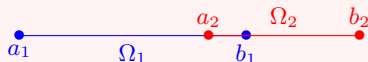
- $\mathbb{B}_i u_i^k = u_i^k$: Dirichlet
- $\mathbb{B}_i u_i^k = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} u_i^k$: Neumann
- $\mathbb{B}_i u_i^k = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} u_i^k + p u_i^k$, $p \in \mathbb{C}$: Robin
- $\mathbb{B}_i u_i^k = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} u_i^k + \mathcal{S}_i u_i^k$



Comme en stationnaire, plusieurs choix

- $\mathbb{B}_i u_i^k = u_i^k$: Dirichlet
- $\mathbb{B}_i u_i^k = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} u_i^k$: Neumann
- $\mathbb{B}_i u_i^k = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} u_i^k + p u_i^k$,
 $p \in \mathbb{C}$: Robin
- $\mathbb{B}_i u_i^k = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} u_i^k + \mathcal{S}_i u_i^k$





On définit sur chaque sous domaine

DOMAINE 1

$$\partial_t u_1^k + \mathcal{L}u_1^k = f \text{ dans } \Omega_1 \times (0, T)$$

$$u_1^k(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_1$$

$$u_1^k(b_1, \cdot) = u_2^{k-1}(b_1, \cdot) \text{ sur } \Gamma_{12} \times (0, T)$$

DOMAINE 2

$$\partial_t u_2^k + \mathcal{L}u_2^k = f \text{ dans } \Omega_2 \times (0, T)$$

$$u_2^k(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_2$$

$$u_2^k(a_2, \cdot) = u_1^{k-1}(a_2, \cdot) \text{ sur } \Gamma_{21} \times (0, T)$$

Algorithme classique

$$u_1^0(b_1, t) = 0, u_2^0(a_2, t) = 0, t \in (0, T)$$

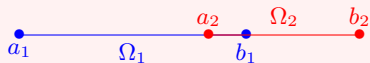
$$k = 1$$

Tant que $(\| (u_1^k - u_1^{k-1})(b_1, T) \|_{L^2}^2 + \| (u_2^k - u_2^{k-1})(a_2, T) \|_{L^2}^2) > \varepsilon$ faire

Résoudre les systèmes dans Ω_1 et Ω_2 , $t \in (0, T)$

Échanger les informations par Cond. Transmission

$$k = k + 1$$



On résoud en parallèle.

DOMAINE 1

Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

$$\partial_t u_1^1 + \mathcal{L}u_1^1 = f \text{ dans } \Omega_1 \times (0, T)$$

$$u_1^1(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_1$$

$$u_1^1(b_1, \cdot) = 0 \text{ sur } \Gamma_{12} \times (0, T)$$

Conserver $\forall t \in (0, T) u_1^1(a_2, t)$

DOMAINE 2

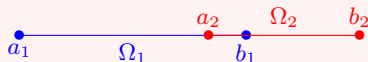
Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

$$\partial_t u_2^1 + \mathcal{L}u_2^1 = f \text{ dans } \Omega_2 \times (0, T)$$

$$u_2^1(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_2$$

$$u_2^1(a_2, \cdot) = 0 \text{ sur } \Gamma_{21} \times (0, T)$$

Conserver $\forall t \in (0, T) u_2^1(b_1, t)$



On résoud en parallèle.

Transmettre $u_1^1(a_2, t)$ à Ω_2 et $u_2^1(b_1, t)$ à Ω_1 , $t \in (0, T)$

DOMAINE 1

Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

$$\partial_t u_1^2 + \mathcal{L}u_1^2 = f \text{ dans } \Omega_1 \times (0, T)$$

$$u_1^2(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_1$$

$$u_1^2(b_1, \cdot) = u_2^1(b_1, \cdot) \text{ sur } \Gamma_{12} \times (0, T)$$

Conserver $\forall t \in (0, T)$ $u_1^2(a_2, t)$

DOMAINE 2

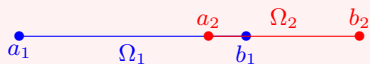
Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

$$\partial_t u_2^2 + \mathcal{L}u_2^2 = f \text{ dans } \Omega_2 \times (0, T)$$

$$u_2^2(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_2$$

$$u_2^2(a_2, \cdot) = u_1^1(a_2, \cdot) \text{ sur } \Gamma_{21} \times (0, T)$$

Conserver $\forall t \in (0, T)$ $u_2^2(b_1, t)$



On résoud en parallèle.

Transmettre $u_1^{K-1}(a_2, t)$ à Ω_2 et $u_2^{K-1}(b_1, t)$ à Ω_1 , $t \in (0, T)$

DOMAINE 1

Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

$$\partial_t u_1^K + \mathcal{L}u_1^K = f \text{ dans } \Omega_1 \times (0, T)$$

$$u_1^L(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_1$$

$$u_1^K(b_1, \cdot) = u_2^{K-1}(b_1, \cdot) \text{ sur } \Gamma_{12} \times (0, T)$$

Conserver $\forall t \in (0, T)$ $u_1^K(a_2, t)$

DOMAINE 2

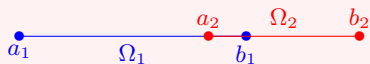
Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

$$\partial_t u_2^K + \mathcal{L}u_2^K = f \text{ dans } \Omega_2 \times (0, T)$$

$$u_2^K(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_2$$

$$u_2^K(a_2, \cdot) = u_1^{K-1}(a_2, \cdot) \text{ sur } \Gamma_{21} \times (0, T)$$

Conserver $\forall t \in (0, T)$ $u_2^K(b_1, t)$



On résoud en parallèle.

Transmettre $u_1^{K-1}(a_2, t)$ à Ω_2 et $u_2^{K-1}(b_1, t)$ à Ω_1 , $t \in (0, T)$

DOMAINE 1

Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

$$\partial_t u_1^K + \mathcal{L}u_1^K = f \text{ dans } \Omega_1 \times (0, T)$$

$$u_1^K(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_1$$

$$u_1^K(b_1, \cdot) = u_2^{K-1}(b_1, \cdot) \text{ sur } \Gamma_{12} \times (0, T)$$

Conserver $\forall t \in (0, T)$ $u_1^K(a_2, t)$

DOMAINE 2

Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

$$\partial_t u_2^K + \mathcal{L}u_2^K = f \text{ dans } \Omega_2 \times (0, T)$$

$$u_2^K(\cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega_2$$

$$u_2^K(a_2, \cdot) = u_1^{K-1}(a_2, \cdot) \text{ sur } \Gamma_{21} \times (0, T)$$

Conserver $\forall t \in (0, T)$ $u_2^K(b_1, t)$

On transmet donc à chaque itération de la méthode SWR

$$u_i^k(x, t), (x, t) \in \Gamma_{i,j} \times (0, T), j = i \pm 1.$$

La partie

Résoudre pour $t = 0 \rightarrow T$

fait appel à un intégrateur temporel numérique.

Les données

$$u_i^k(x, t), (x, t) \in \Gamma_{i,j} \times (0, T), j = i \pm 1.$$

sont donc discrètes.

Le schéma suivi pour les méthodes SWR

Discrétiser en espace puis en temps

Méthode de décomposition en espace

Discrétiser en temps puis en espace

Après discrétisation en temps, on a **pour chaque pas de temps** un problème **stationnaire**

Utiliser les méthodes de DDM de la partie I à chaque pas de temps

Pour simplifier, on prend $f = 0$.

Intégrateur temporel numérique

$$\partial_t u_i^k + \mathcal{L}u_i^k = 0 \longrightarrow F(u_{i,n+1}^k) = G(u_{i,n}^k)$$

où $u_{i,n}^k(x)$ est une approximation de $u_i^k(x, t_n)$, $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = T/N_{\text{iter}}$.

Algorithme

Pour $n = 1$ à N_{iter} ,

$$u_{1,n}^0(b_1) = u_{n-1}^{K_f}(b_1), \quad u_{2,n}^0(a_2) = u_{n-1}^{K_f}(a_2),$$

$$k = 1$$

Tant que $(\|(u_{1,n}^k - u_{1,n}^{k-1})(b_1, \Delta t)\|_{L^2}^2 + \|(u_{2,n}^k - u_{2,n}^{k-1})(a_2, \Delta t)\|_{L^2}^2) > \varepsilon$ faire

Faire une étape de l'intégrateur en temps dans Ω_1 et Ω_2 ,

Échanger les informations par Cond. Transmission

$$k = k + 1$$

$$K_f = k$$

$$u_n^{K_f}(b_1) = u_{2,n}^{K_f}(b_1) \text{ et } u_n^{K_f}(a_2) = u_{1,n}^{K_f}(a_2)$$

On transmet donc à chaque itération de la méthode et à chaque pas de temps

$$u_{i,n}^k(x), x \in \Gamma_{i,j}, j = i \pm 1.$$

SWR

Pour $k = 1$ à K_f

Échange $u_{i,n}^k(x), x \in \Gamma_{i,j}, j = i \pm 1, n \in \{1, \dots, N_{\text{iter}}\}$

Décomposition en espace

Pour $n = 1$ à N_{iter}

Pour $k = 1$ à K_f

Échange $u_{i,n}^k(x), x \in \Gamma_{i,j}, j = i \pm 1.$

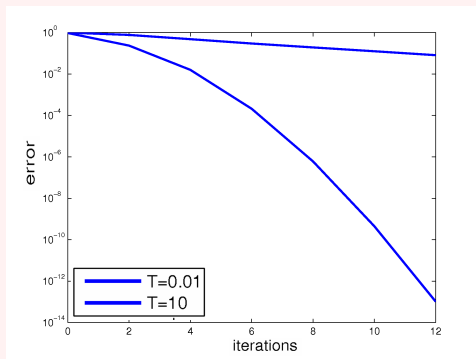
Beaucoup plus d'échanges d'informations ... surcoût éventuel.

- 1 RAPPELS
- 2 HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE RELAXATION D'ONDES
- 3 LA MÉTHODE SWR
- 4 PROPRIÉTÉS**
- 5 DÉVELOPPEMENTS
- 6 MISE EN ŒUVRE


Deux comportements différents

- temps longs \implies convergence linéaire
- temps courts \implies convergence superlinéaire

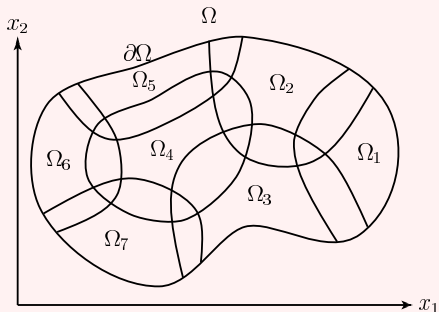
Équation de la chaleur 1D avec
 $L = 0.1$



La méthode de décomposition en espace regagne en intérêt ou encore **méthode SWR à fenêtres**.

 Gander, Zhao, *Overlapping Schwarz Waveform Relaxation for the Heat Equation in n-Dimensions*, BIT, 2002

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_j^{k+1} = \Delta u_j^{k+1} + f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad 0 < t < \infty, \\ u_j^{k+1}(\mathbf{x}, t) = u_l^k(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_{jl}, \quad 0 < t < \infty, \\ u_j^{k+1}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_{j0}, \quad 0 < t < \infty, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_j. \end{array} \right.$$



- Soit m_j le plus petit nombre de domaines à traverser depuis Ω_j pour rejoindre $\partial\Omega$.
- $m = \max_j m_j$.
- δ distance minimale d'overlap entre sous domaines.
- u la solution de l'équation de la chaleur sur $\Omega \times (0, \infty)$.
- $e_j^k = u - u_j^k$ l'erreur sur le domaine j à l'itération k .

Temps infini, convergence linéaire

$$\max_j \sup_{x \in \Omega_j, t > 0} |e_j^{k(m+2)}| \leq (\gamma(m, \delta))^k \max_j \sup_{x \in \Omega_j, t > 0} |e_j^0|,$$

où $\gamma(m, \delta) < 1$

Temps fini, convergence superlinéaire

$$\max_j \sup_{x \in \Omega_j, t < T} |e_j^k| \leq (2d)^k \operatorname{erfc} \left(\frac{k\delta}{2\sqrt{\pi T}} \right) \max_j \sup_{x \in \Omega_j, t < T} |e_j^0|.$$

où d est la dimension.

Le taux de convergence trouvé pour les algorithmes de relaxation d'onde classique pour les EDOs est

$$\frac{CT^k}{k!} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + O(k^{-1}) \right) e^{-k \log k + (1 + \log(CT))k - \frac{1}{2} \log k} \approx e^{-k \log k}$$

Le taux de convergence superlinéaire pour une EDP diffusive est

$$C_1^k \operatorname{erfc} \left(\frac{C_2 k}{\sqrt{T}} \right) = \left(\frac{\sqrt{T}}{C_2 \sqrt{\pi}} + O(k^{-2}) \right) e^{-\frac{C_2^2}{T} k^2 + \log(C_1)k - \log k} \approx e^{-k^2}$$

L'amélioration est due à la diffusion issue du noyau de la chaleur.

$$\mathcal{L}u = (\mathbf{a} \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + bu$$

Conditions de transmission de Dirichlet

- Convergence si **overlap**.
- Pas de convergence sinon.
- 📄 Daoud & Gander (2003), Daoud & Caltinoglu (2007)

Temps infini, convergence linéaire

$$\max_j \sup_{x \in \Omega_j, t > 0} |e_j^{k(m+2)}| \leq (\gamma(m, \delta))^k \max_j \sup_{x \in \Omega_j, t > 0} |e_j^0|,$$

où $\gamma(m, \delta) < 1$

Temps fini, convergence superlinéaire

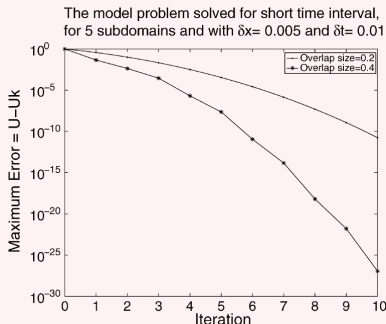
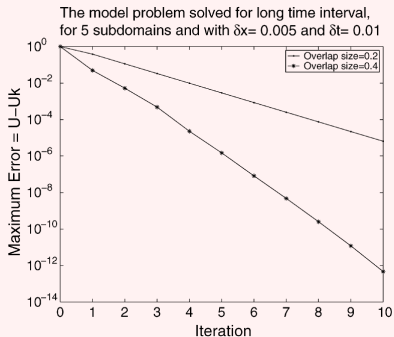
$$\max_j \sup_{x \in \Omega_j, t < T} |e_j^k| \leq (C(\nu, \mathbf{a}, \delta))^k \operatorname{erfc} \left(\frac{k\delta}{2\sqrt{d\nu T}} \right) \max_j \sup_{x \in \Omega_j, t < T} |e_j^0|.$$


où d est la dimension.

Exemple de Daoud & Caltinoglu (2007)

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_x^2 u - 0.25\phi^2 u, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) &= e^{-0.5\pi t^2}, & 0 < t < T, \\ u(1, t) &= 0, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= \cos(0.5\phi^2 x), & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Ω est subdivisé en 5 sous domaines avec overlap de 0.2 et 0.4. Les temps finaux sont respectivement $T = 10$ (gauche) et $T = 1$ (droite)



 Gander, Halpern, Nataf, *Optimal Convergence for Overlapping and Non-Overlapping Schwarz Waveform Relaxation*, Proc. DD11, (1999)

Remplacer les conditions de transmission de Dirichlet par les conditions aux limites transparentes sous-jacentes aux équations

- Éq. des ondes $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = f(x, t)$, $c > 0$.
- Éq. de réaction-convection-diffusion $\partial_t u - \nu \partial_x^2 u + a \partial_x u + bu = f(x, t)$, $\nu > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Conditions aux limites = **opérateur Dirichlet-Neumann**

ÉQ. DES ONDES HOMOGENÈNE 1D

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \partial_t^2 \psi - c^2 \partial_x^2 \psi = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}_x \times [0; T], \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}_x, \\ \partial_t \psi(x, 0) = \psi_1(x), & x \in \mathbb{R}_x. \end{cases}$$

HYPOTHÈSES : $\text{supp}(\psi_{0,1}) \subset B(0, R)$.

Solution

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2}(\psi_0(x + ct) + \psi_0(x - ct)) + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_1(y) dy.$$

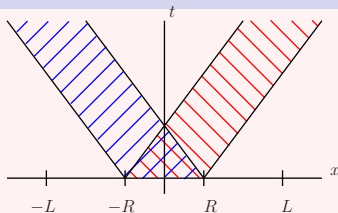
Simplement,

$$\psi(x, t) = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct),$$

avec

$$2\varphi_1(x) = \psi_0(x) + \int_{-\infty}^x \psi_1(y) dy,$$

$$2\varphi_2(x) = \psi_0(x) - \int_{-\infty}^x \psi_1(y) dy.$$


 $\text{supp}(\varphi_1(x+ct))$

 $\text{supp}(\varphi_2(x-ct))$

$\forall t > 0$ et $\forall |x| > R$, les supports sont disjoints.

| | |
|---------------------------------------|--|
| $x = -L$ | $x = L$ |
| $\psi(x, t) = \varphi_1(x + ct)$ | $\psi(x, t) = \varphi_2(x - ct)$ |
| $\partial_x \psi = c \partial_t \psi$ | $\partial_x \psi = -c \partial_t \psi$ |

Alors, sur $x = \pm L$, la donnée de **Neumann** s'exprime en fonction de celle de **Dirichlet**

$$c \partial_{\mathbf{n}} \psi + \partial_t \psi = 0$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur unitaire sortant à $\Omega = (-L, L)$.

Remarque :

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x).$$

Autre méthode : **transformée de Laplace**

$$\mathcal{L}_a(u)(x, \omega) = \hat{u}(x, \omega) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-\omega t} dt$$

avec la fréquence $\omega = \sigma + i\tau$, $\sigma > 0$

$$\mathcal{L}_a(\partial_t u)(x, \omega) = \omega \hat{u}(x, \omega) - u(x, 0),$$

$$\mathcal{L}_a(\partial_t^2 u)(x, \omega) = \omega^2 \hat{u}(x, \omega) - \omega u(x, 0) - \partial_t u(x, 0).$$

❶ Problème de transmission

PROBLÈME INTÉRIEUR

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)v = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_x v = \partial_x w, & x \in \Gamma, t > 0, \\ v(x, 0) = \psi_0(x), & x \in \Omega, \\ \partial_t v(x, 0) = \psi_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

PROBLÈME EXTÉRIEUR

$$\begin{cases} (\partial_t - c^2 \partial_x^2)w = 0, & x \in \bar{\Omega}, t > 0, \\ w(x, t) = v(x, t), & x = \pm L, t > 0, \\ w(x, 0) = 0, & x \in \bar{\Omega}, \\ \partial_t w(x, 0) = 0, & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

- ② Transformée de Laplace w.r.t temps pour $x > L$: $\omega^2 \hat{w} - c^2 \partial_x^2 \hat{w} = 0$.

Solution : $\hat{w}(x, \omega) = A^+(\omega) e^{\frac{\omega}{c} x} + A^-(\omega) e^{-\frac{\omega}{c} x}$

- ③ Sélection de l'onde sortante : solution d'énergie finie $\rightarrow A^+ = 0$.

$$\hat{w}(x, \omega) = e^{-\frac{\omega}{c}(x-L)} \mathcal{L}_a(w(L, \cdot))(\omega).$$

En prenant la dérivée

$$\partial_x \hat{w}(x, \omega)|_{x=L} = -\frac{\omega}{c} \hat{w}(x, \omega)|_{x=L}$$

- ④ Transformée de Laplace inverse

$$c \partial_x w(x, t)|_{x=L} = -\partial_t w(x, t)|_{x=L}.$$

- ⑤ Ainsi, on obtient la CLT pour v

$$\partial_n v + \frac{\partial_t v}{c} = 0$$

MÉTHODE SWR, $k \geq 0$

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u_1^k - c^2 \partial_x^2 u_1^k = 0, & (x, t) \in (-\infty, L) \times (0; T) \\ \mathbb{B}_1 u_1^k = \mathbb{B}_1 u_2^{k-1}, & (x, t) \in \{L\} \times (0; T), \\ \partial_t^2 u_2^k - c^2 \partial_x^2 u_2^k = 0, & (x, t) \in (0, \infty) \times (0; T) \\ \mathbb{B}_2 u_2^k = \mathbb{B}_2 u_1^{k-1}, & (x, t) \in \{0\} \times (0; T), \\ u(x, 0) = u_I^0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_I^1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathbb{B}_i = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} + \frac{\partial_t}{c} = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} + \Lambda, \quad \Lambda = \mathcal{L}_a^{-1} \left(\frac{\omega}{c} \right).$$

THM. Gander, Halpern, Nataf, 99

- L'algorithme SWR avec $\mathbb{B}_i = Id$ converge dès que $k \geq Tc/\delta$, δ taille d'overlap.
- L'algorithme SWR avec $\mathbb{B}_i = \partial_{\mathbf{n}_{ij}} + \partial_t/c$ converge en **deux** itérations, indépendamment de la taille de l'overlap.

$$\partial_t u + \mathcal{L}u = \partial_t u - \nu \partial_x^2 u + a \partial_x u + cu = 0$$

CLT

$$\partial_n u \mp \Lambda^\pm u = 0.$$

- Mise en jeu d'un opérateur pseudo-différentiel (*i.e* non local).
- Signe - pour côté droit, + pour gauche.
 - Côté droit : $\partial_x u - \Lambda^- u = 0$.
 - Côté gauche : $\partial_x u - \Lambda^+ u = 0$.

On a

$$\Lambda^\pm u = \mathcal{L}_a^{-1} \left(\frac{a \pm \delta^{1/2}}{2\nu} \right) * u, \text{ avec } \delta = a^2 + 4\nu(c + \omega).$$

Pour la chaleur ($a = c = 0$)

CLT

$$\partial_{\mathbf{n}} u + \mathcal{L}_a^{-1} \left(\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\nu}} \right) * u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\mathbf{n}} u + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \partial_t^{1/2} u = 0,$$

avec

$$\partial_t^{1/2} f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_t \int_0^t \frac{f(x, s)|_{x=x_r}}{\sqrt{t-s}} ds$$

opérateur de dérivation
fractionnaire d'ordre
1/2

MÉTHODE SWR, $k \geq 0$

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t u_1^k - \nu \partial_x^2 u_1^k + a \partial_x u_1^k + b u_1^k = 0, & (x, t) \in (-\infty, L) \times (0; T) \\ \mathbb{B}_1 u_1^k = \mathbb{B}_1 u_2^{k-1}, & (x, t) \in \{L\} \times (0; T), \\ \partial_t u_2^k - \nu \partial_x^2 u_2^k + a \partial_x u_2^k + b u_2^k = 0, & (x, t) \in (0, \infty) \times (0; T) \\ \mathbb{B}_2 u_2^k = \mathbb{B}_2 u_1^{k-1}, & (x, t) \in \{0\} \times (0; T), \\ u(x, 0) = u_I^0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathbb{B}_1 = \partial_x - \Lambda^- \text{ et } \mathbb{B}_2 = \partial_x - \Lambda^+$$

THM. Gander, Halpern, Nataf, 99

- L'algorithme SWR converge en **deux** itérations, indépendamment de la taille de l'overlap.

Algorithme $n \geq 1$

$$\Omega^- = (-\infty, L)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L})u_1^k = f, \quad x \in \Omega^-, t > 0,$$

$$u_1^k(x, 0) = u_0, \quad x \in \Omega^-$$

$$u_1^k(L, t) = u_2^{n-1}(L, t), \quad t > 0$$

$$\Omega^+ = (0, +\infty)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L})u_2^k = f, \quad x \in \Omega^+, t > 0,$$

$$u_2^k(x, 0) = u_0, \quad x \in \Omega^+$$

$$u_2^k(0, t) = u_1^{n-1}(0, t), \quad t > 0$$

Étape 1

$$\Omega^- = (-\infty, L)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L})u_1^1 = f, \quad x \in \Omega^-, t > 0,$$

$$u_1^1(x, 0) = u_0, \quad x \in \Omega^-$$

$$u_1^1(L, t) = g_L(t), \quad t > 0$$

$$\Omega^+ = (0, +\infty)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L})u_2^1 = f, \quad x \in \Omega^+, t > 0,$$

$$u_2^1(x, 0) = u_0, \quad x \in \Omega^+$$

$$u_2^1(0, t) = g_0(t), \quad t > 0$$

avec $g_L(0) = u_0(L)$ et $g_0(0) = u_0(0)$.

Erreurs :

$$e_1^k = u|_{\Omega^-} - u_1^k \quad \text{et} \quad e_2^k = u|_{\Omega^+} - u_2^k.$$

$$\Omega^- = (-\infty, L)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L})e_1^k = 0,$$

$$e_1^k(x, 0) = 0,$$

$$e_1^k(L, t) = e_2^{n-1}(L, t),$$

$$\Omega^+ = (0, +\infty)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L})e_2^k = 0,$$

$$e_2^k(x, 0) = 0,$$

$$e_2^k(0, t) = e_1^{n-1}(0, t),$$

Comme $e_i^k(x, 0) = 0$, on a en passant par Laplace les EDOs en x

$$(\omega + \mathcal{L})\hat{e}_i^k = 0$$

et les solutions s'écrivent

$$\hat{e}_1^k(x, \omega) = \alpha_k(\omega)e^{\lambda^+ x}, \quad x \leq L$$

$$\hat{e}_2^k(x, \omega) = \beta_k(\omega)e^{\lambda^- x}, \quad x \geq 0,$$

avec

$$\lambda^\pm = \frac{a \pm \delta^{1/2}}{2\nu}.$$

En utilisant les CL en $x = L$ et $x = 0$, on obtient

$$\hat{e}_1^k(x, \omega) = e^{L(\lambda^- - \lambda^+)} \hat{e}_1^{k-2}, \quad x \leq L$$

$$\hat{e}_2^k(x, \omega) = e^{L(\lambda^- - \lambda^+)} \hat{e}_2^{k-2}, \quad x \geq 0.$$

TAUX DE CONVERGENCE

$$\rho(\omega) = \left| \frac{\hat{e}_i^{k+1}}{\hat{e}_i^{k-1}} \right| = e^{\operatorname{Re}(\lambda^- - \lambda^+)L}.$$

Or, $\lambda^- - \lambda^+ = -\frac{\delta^{1/2}}{\nu}$ et donc

$$\operatorname{Re}(\lambda^- - \lambda^+) \leq -\alpha,$$

avec $\alpha = \sqrt{a^2 + 4\nu c}/\nu$.

Ainsi, $\rho \leq e^{-\alpha L}$ et on a

$$|\hat{e}_i^k| \leq e^{-\lceil k/2 \rceil \alpha L} |\hat{e}_i^0|.$$

$$|\hat{e}_i^k| \leq e^{-\lceil k/2 \rceil \alpha L} |\hat{e}_i^0|.$$

- L'erreur tend vers 0 dans chaque sous domaine
- Plus L est grand, plus la convergence est rapide
- Si $L = 0$, pas de convergence : $\hat{e}_i^{k+1} = \hat{e}_i^{k-1}$, $\forall k > 1$.

$$\Omega^- = (-\infty, L)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L})e_1^k = 0,$$

$$e_1^k(x, 0) = 0,$$

$$\mathbb{B}^+ e_1^k(L, t) = \mathbb{B}^+ e_2^{n-1}(L, t),$$

$$\Omega^+ = (0, +\infty)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L})e_2^k = 0,$$

$$e_2^k(x, 0) = 0,$$

$$\mathbb{B}^- e_2^k(0, t) = \mathbb{B}^- e_1^{n-1}(0, t),$$

$$\mathbb{B}^+ = \partial_x - \Lambda^- \text{ et } \mathbb{B}^- = \partial_x - \Lambda^+$$

On a pour $k \geq 1$

$$\hat{e}_1^k(x, \omega) = \alpha_k(\omega)e^{\lambda^+ x}, \quad x \leq L$$

$$\hat{e}_2^k(x, \omega) = \beta_k(\omega)e^{\lambda^- x}, \quad x \geq 0,$$

et donc

$$\partial_x \hat{e}_1^k(x, \omega) - \lambda^+ \hat{e}_1^k(x, \omega) = 0, \quad x \leq L$$

$$\partial_x \hat{e}_2^k(x, \omega) - \lambda^- \hat{e}_2^k(x, \omega) = 0, \quad x \geq 0.$$

Comme \hat{e}_i^0 sont quelconques, \hat{e}_i^1 sont non triviaux.

Par les conditions de transmission, on a

$$\partial_x \hat{e}_1^2(L, \omega) - \lambda^- \hat{e}_1^2(L, \omega) = \partial_x \hat{e}_2^1(L, \omega) - \lambda^- \hat{e}_2^1(L, \omega) = 0,$$

$$\partial_x \hat{e}_2^2(0, \omega) - \lambda^+ \hat{e}_2^2(0, \omega) = \partial_x \hat{e}_1^1(0, \omega) - \lambda^+ \hat{e}_1^1(0, \omega) = 0.$$

et donc

$$\alpha_2 = \beta_2 = 0$$

soit encore

$$\hat{e}_1^2 = \hat{e}_2^2 = 0.$$

On a donc

$$u_1^2 = u|_{\Omega^-} \quad \text{et} \quad u_2^2 = u|_{\Omega^+}.$$

Convergence en 2 étape $\forall L$.

REMARQUES

- Pour la chaleur, on peut approcher $\Lambda^\pm = \frac{\partial_t^{1/2}}{\sqrt{\nu}}$ par une quadrature.

Ex :  Antoine, CB, 03,

$$\partial_t^{1/2} f(t^n) \approx \sqrt{\frac{2}{\Delta t}} \sum_{k=0}^n \beta_{n-k} f^k \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \dots) \\ \beta_k = (-1)^k \alpha_k, \quad \forall k \geq 0. \end{array} \right.$$

- Pour l'équation générale, c'est trop compliqué : on doit procéder à des approximations du symbole de l'opérateur Ψ DO.

Taylor de $\delta^{1/2}$ pour $|\omega| \ll 1$.

$$\delta^{1/2} \approx \sqrt{a^2 + 4\nu c} + \frac{2\nu}{\sqrt{a^2 + 4\nu c}} \omega.$$

D'où

$$\lambda_0^\pm = \frac{a \pm p}{2\nu} \text{ et } \lambda_1^\pm = \frac{a \pm p}{2\nu} \pm q\omega,$$

avec $p > 0$ et $q > 0$.

Conditions de transmission

$$\partial_x u_1^{k+1} - S_j^- u_1^{k+1} = \partial_x u_2^k - S_j^- u_2^k, \quad j = 0, 1,$$

$$\partial_x u_2^{k+1} - S_j^+ u_2^{k+1} = \partial_x u_1^k - S_j^+ u_1^k, \quad j = 0, 1.$$

On a $\hat{e}_1^k = \alpha_k e^{\lambda^+ x}$, $x \leq L$ et $\hat{e}_2^k = \beta_k e^{\lambda^- x}$, $x \geq 0$ et

$$\partial_x \hat{e}_1^{k+1} - S_j^- \hat{e}_1^{k+1} = \partial_x \hat{e}_2^k - S_j^- \hat{e}_2^k, \quad j = 0, 1,$$

$$\partial_x \hat{e}_2^{k+1} - S_j^+ \hat{e}_2^{k+1} = \partial_x \hat{e}_1^k - S_j^+ \hat{e}_1^k, \quad j = 0, 1.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1}(\lambda^+ - \lambda_0^-) e^{\lambda^+ L} &= \beta_k(\lambda^- - \lambda_0^-) e^{\lambda^- L}, \\ \beta_{k+1}(\lambda^- - \lambda_0^+) &= \alpha_k(\lambda^+ - \lambda_0^+). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\alpha_{k+1} = \frac{\lambda^- - \lambda_0^-}{\lambda^+ - \lambda_0^-} \cdot \frac{\lambda^+ - \lambda_0^+}{\lambda^- - \lambda_0^+} e^{(\lambda^- - \lambda^+)L} \alpha_{k-1}.$$

Or, $\lambda^+ + \lambda^- = \lambda_0^+ + \lambda_0^- = a/\nu$ et donc

$$\alpha_{k+1} = \left(\frac{\lambda^+ - \lambda_0^+}{\lambda^- - \lambda_0^+} \right)^2 e^{(\lambda^- - \lambda^+)L} \alpha_{k-1}.$$

Taux de convergence

$$\begin{aligned} \rho_0(\omega, p) &= \left| \frac{\lambda^+(\omega) - \lambda_0^+}{\lambda^-(\omega) - \lambda_0^+} \right|^2 e^{\operatorname{Re}(\lambda^- - \lambda^+)L} \\ &= \left| \frac{\delta^{1/2} - p}{\delta^{1/2} + p} \right|^2 e^{-\frac{L}{\nu} \operatorname{Re}(\delta^{1/2})} \end{aligned}$$

Puisque $p > 0$, $\exists C_1 < 1$ tel que $\left| \frac{\delta^{1/2} - p}{\delta^{1/2} + p} \right| < C_1$ et donc

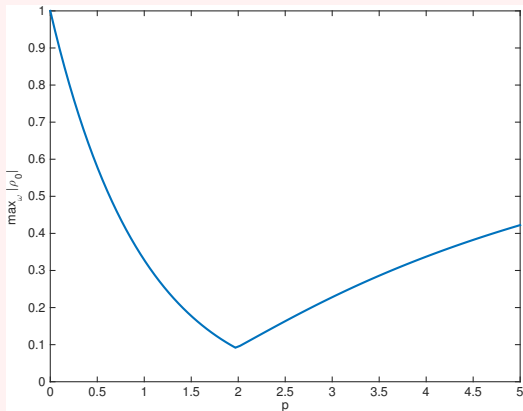
$$|\hat{e}_1^{k+1}| \leq C_1 e^{-\alpha L} |\hat{e}_1^{k-1}|.$$

On a convergence même si $L = 0$ et elle est plus rapide que Dirichlet.

Idem pour l'ordre 1.

- Taylor est basé sur une approximation basse fréquence.
- Pour obtenir une meilleure approximation, **optimisation du taux de convergence sur toutes les fréquences.**
- 📄 V. Martin, 2003, thèse + articles.

Lorsque l'on discrétise en temps, les fréquences disponibles sont $|\omega| \in \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t} \right]$.

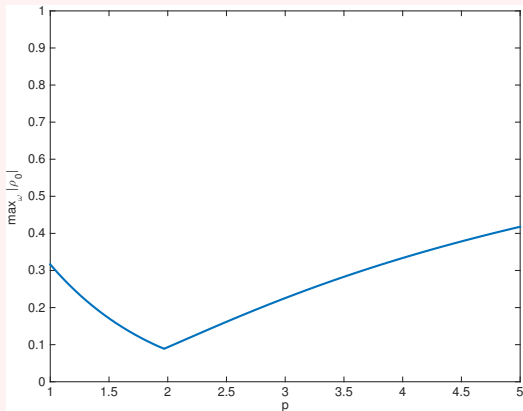


Taux de convergence sans recouvrement

$\nu = 0.01, a = 1, c = 0,$
 $\Delta t = 10^{-2}, L = 0$ et
 $T = 1.$

- Taylor est basé sur une approximation basse fréquence.
- Pour obtenir une meilleure approximation, **optimisation du taux de convergence sur toutes les fréquences.**
- 📄 V. Martin, 2003, thèse + articles.

Lorsque l'on discrétise en temps, les fréquences disponibles sont $|\omega| \in \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t} \right]$.



Taux de convergence avec recouvrement

$\nu = 0.01$, $a = 1$, $c = 0$,
 $\Delta t = 10^{-2}$, $L = 10^{-4}$ et
 $T = 1$.

A résoudre

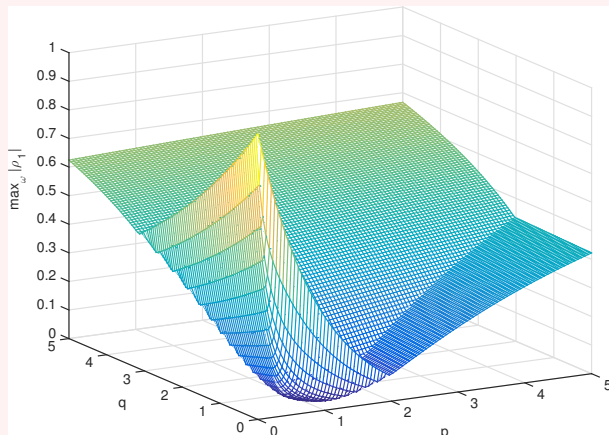
$$\min_{p>0} \max_{\frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t}} \left| \frac{\delta^{1/2} - p}{\delta^{1/2} + p} \right|^2 e^{-\frac{L}{\nu} \operatorname{Re}(\delta^{1/2})}$$

ou

$$\min_{(p,q)>0, p - \frac{a^2}{2}q > 0} \max_{\frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t}} \left| \frac{\delta^{1/2} - p - 2\nu q\omega}{\delta^{1/2} + p + 2\nu q\omega} \right|^2 e^{-\frac{L}{\nu} \operatorname{Re}(\delta^{1/2})}.$$

QUELQUES PREUVES DE CONVERGENCE

TRANSMISSION = OPTIMISATION DE p ET q

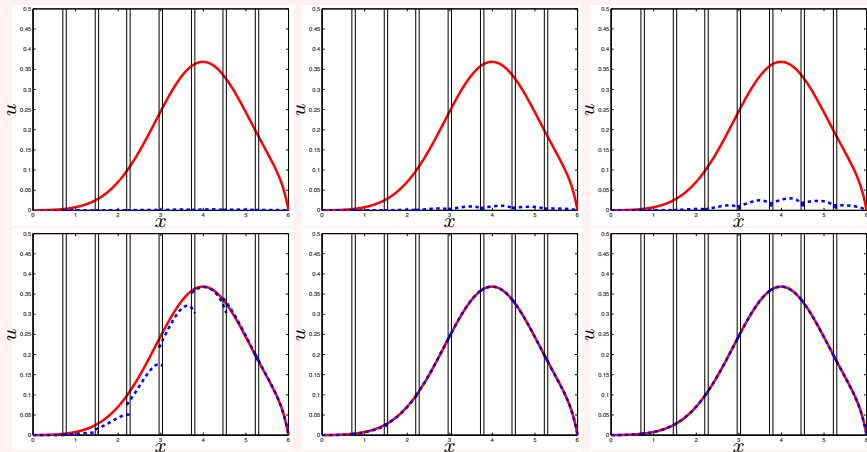


Taux de convergence sans recouvrement


$\nu = 0.01$, $a = 1$,
 $c = 0$,
 $\Delta t = 10^{-2}$,
 $L = 0$ et $T = 1$.

Halpern, *Absorbing Boundary Conditions and Optimized Schwarz Waveform Relaxation*, BIT 03

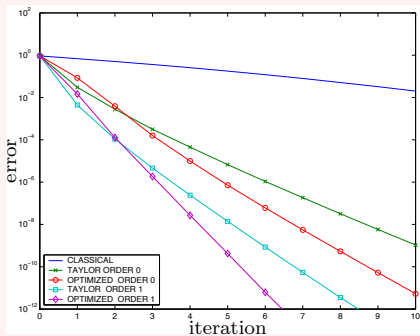
$\Omega = (0, 6)$, $T = 2.5$, CL. Dirichlet homogènes, $\Delta x = 2.10^{-2}$, $\Delta t = 5.10^{-3}$, 8 sous-domaines.



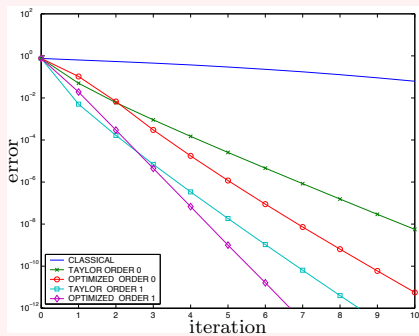
Suite des itérés pour $j = 1, \dots, 8$ avec transmission Dirichlet à T .

 Halpern, *Absorbing Boundary Conditions and Optimized Schwarz Waveform Relaxation*, BIT 03

$\Omega = (0, 6)$, $T = 2.5$, CL. Dirichlet homogènes, $\Delta x = 2.10^{-2}$, $\Delta t = 5.10^{-3}$, 8 sous-domaines.




4 sous domaines



8 sous domaines

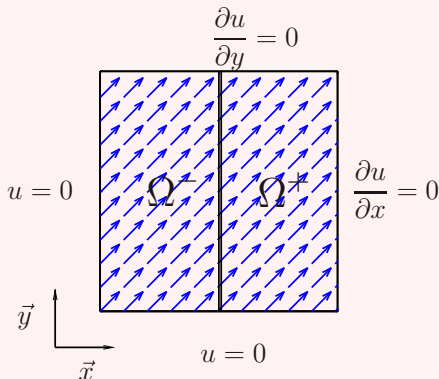
- 1 RAPPELS
- 2 HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE RELAXATION D'ONDES
- 3 LA MÉTHODE SWR
- 4 PROPRIÉTÉS
- 5 DÉVELOPPEMENTS**
- 6 MISE EN ŒUVRE


Éq réaction-diffusion-convection 2D :  V. Martin, thèse 2003, Appl. Num. Math. 2005

$$\partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla u - \nu \Delta u + cu = f,$$

avec $\mathbf{b} = (a, b)$.

- Résultats de convergence similaires
- Existence, unicité, régularité dans espaces de Sobolev
- Vitesse non constante

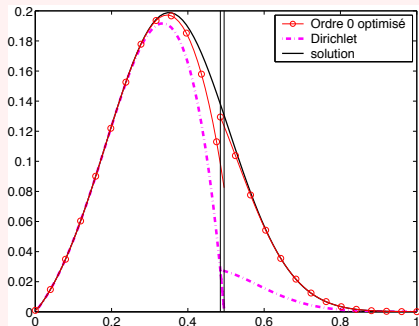


Éq réaction-diffusion-convection 2D :  V. Martin, thèse 2003, Appl. Num. Math. 2005

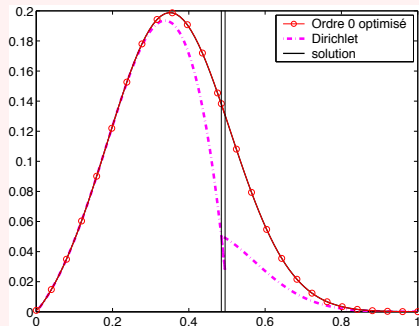
$$\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+, \quad \Omega^- = \{(x, y), 0 \leq q \leq 0.51, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Omega^+ = \{(x, y), 0.50 \leq q \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta t = 0.01, \quad T = 1,$$


$$\nu = a = b = 0.01, \quad c = 0$$



Coupe de l'itéré 1



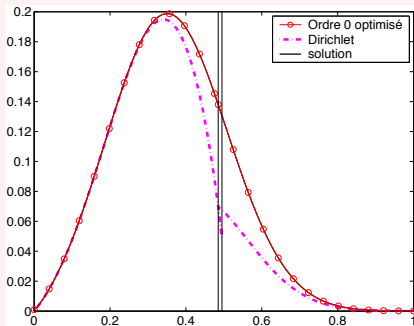
Coupe de l'itéré 2

Éq réaction-diffusion-convection 2D :  V. Martin, thèse 2003, Appl. Num. Math. 2005


$$\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+, \quad \Omega^- = \{(x, y), 0 \leq q \leq 0.51, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Omega^+ = \{(x, y), 0.50 \leq q \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta t = 0.01, \quad T = 1,$$

$$\nu = a = b = 0.01, \quad c = 0$$



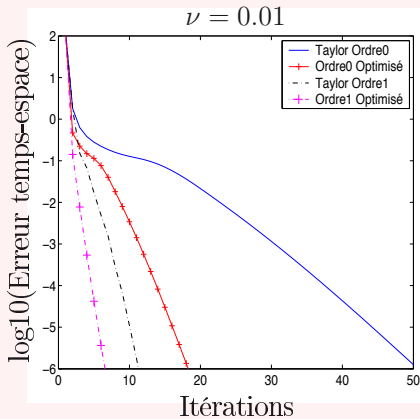
Coupe de l'itéré 3

Éq réaction-diffusion-convection 2D :  V. Martin, thèse 2003, Appl. Num. Math. 2005

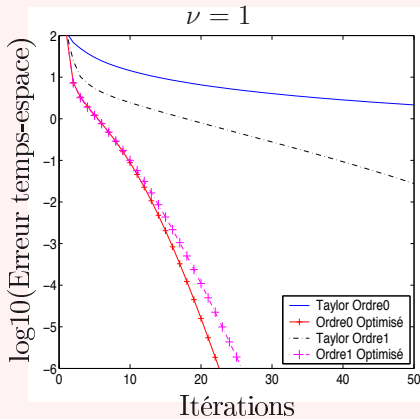
$$\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+, \quad \Omega^- = \{(x, y), 0 \leq q \leq 0.51, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Omega^+ = \{(x, y), 0.50 \leq q \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta t = 0.01, \quad a = b = 1,$$


$$T = 0.1$$



Convergence (sans recouvrement) pour $\nu = 0.01$

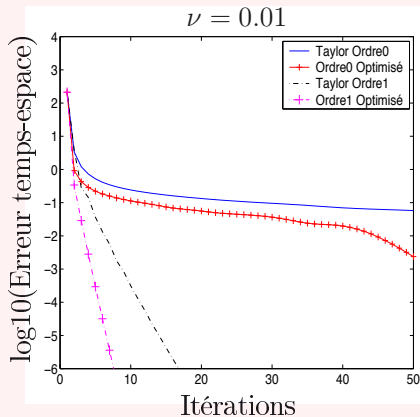


Convergence (sans recouvrement) pour $\nu = 1$

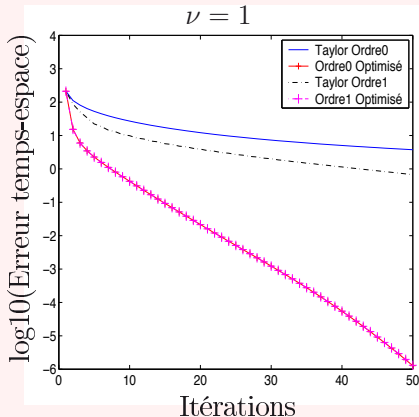
Éq réaction-diffusion-convection 2D :  V. Martin, thèse 2003, Appl. Num. Math. 2005

$$\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+, \quad \Omega^- = \{(x, y), 0 \leq q \leq 0.51, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Omega^+ = \{(x, y), 0.50 \leq q \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta t = 0.01, \quad a = b = 1, \quad T = 1$$



Convergence (sans recouvrement) pour
 $\nu = 0.01$



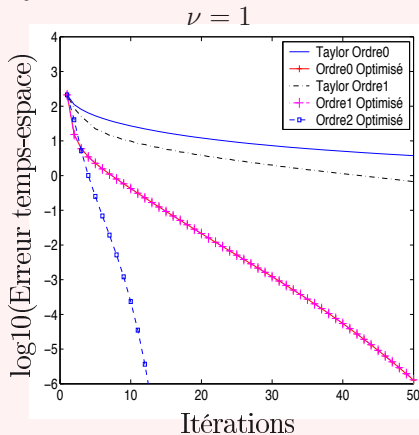
Convergence (sans recouvrement) pour
 $\nu = 1$

Éq réaction-diffusion-convection 2D : 📄 V. Martin, thèse 2003, Appl. Num. Math. 2005

$$\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+, \quad \Omega^- = \{(x, y), 0 \leq q \leq 0.51, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Omega^+ = \{(x, y), 0.50 \leq q \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta t = 0.01, \quad T = 1,$$

$$\nu = a = b = 0.01, \quad c = 0$$

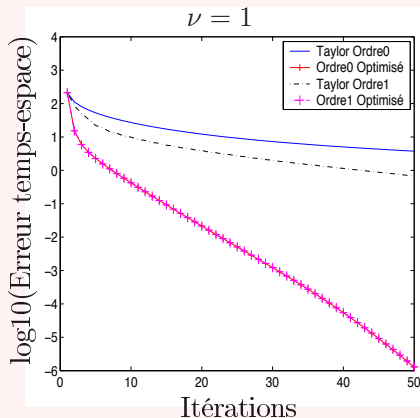


Convergence (sans recouvrement) pour

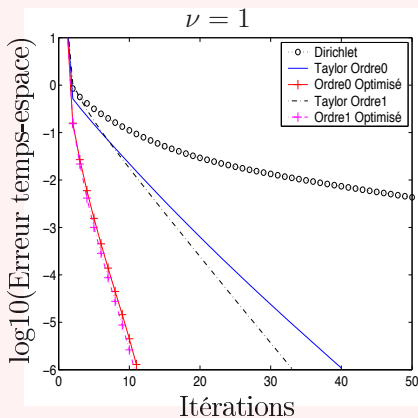
$$\nu = 1$$

Éq réaction-diffusion-convection 2D : 📄 V. Martin, thèse 2003, Appl. Num. Math. 2005

$T = 1$





Convergence (sans recouvrement) pour $\nu = 1$




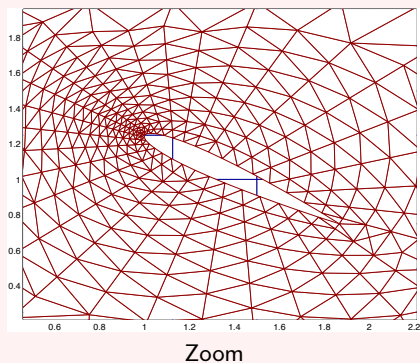
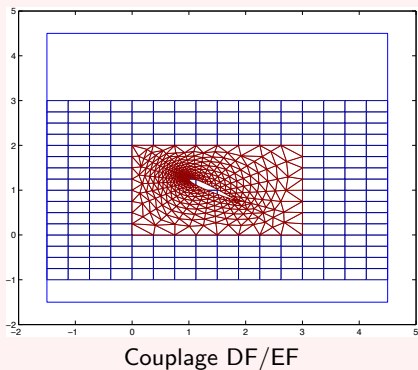
Convergence (avec recouvrement) pour $\nu = 1$

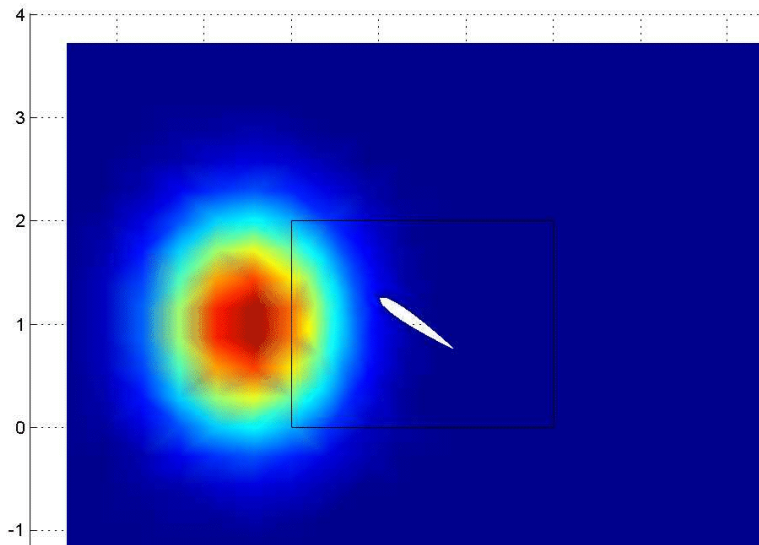
Un recouvrement améliore la convergence


Éq réaction-diffusion-convection 2D :  V. Martin, thèse 2003, Appl. Num. Math. 2005

- Résultats pour vitesse variable similaires
- Couplage zones convection pure / convection-diffusion; Aussi :  Gander, Halpern, Japhet, Martin 2007.


 D'Anfray, Halpern, Ryan, M2AN 2002, Couplage Différences Finies/Éléments Finis






- **Advection nonlinéaire**,  Gander, Rohde, *Overlapping Schwarz Waveform Relaxation for Convection Dominated Dissipative Conservation Laws*, SIAM J. Sci. Comp., 2005


$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_x^2 u.$$

- **Équation de réaction-diffusion semi-linéaire**,  Caetano, Gander, Halpern et Szeftel *Schwarz Waveform Relaxation Algorithms for Semilinear Reaction-Diffusion Equations*, Networks and Heterogeneous Media, AMS, 2010.

$$\partial_t u - \nu \Delta u + f(u) = 0.$$

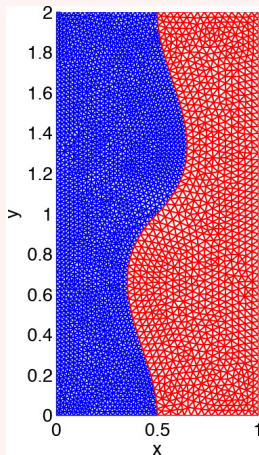
Condition optimisée d'ordre 2 et condition de transmission non linéaire.

- **Système d'équations de réaction-diffusion semi-linéaires**,  Descombes, Dolean and Gander *Schwarz Waveform Relaxation Methods for Systems of Semi-Linear Reaction-Diffusion Equations*, Lecture Notes in CSE, 2010.

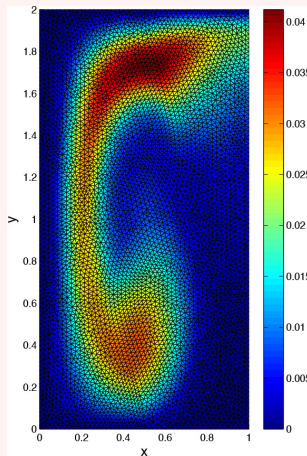
- **Advection-réaction-diffusion avec coeff. non constants + Galerkin discontinu**,  Halpern, Japhet et Szeftel *Optimized Schwarz Waveform Relaxation and Discontinuous Galerkin Time Stepping for Heterogeneous Problem*, SIAM J. Numer. Anal., 2012

$$\xi \partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{b}u - \nu \nabla u) = 0.$$

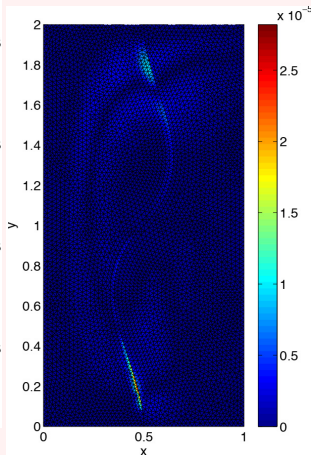
ξ porosité discontinue = $\xi_1 = 0.1$ et $\xi_2 = 1$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 2)$, $T = 1.5$,
 $\nu_1 = 0.003$, $\nu_2 = 0.01$



Domaine






DG après 10 fenêtres en
temps et 5 itérations par
fenêtre





Erreur




ÉQUATION DES ONDES

-  M.J. Gander, L. Halpern and F. Nataf, *Optimal Schwarz Waveform Relaxation for the One Dimensional Wave Equation*, SIAM J. Numer. Anal., 2003.
- SWR optimisée  M.J. Gander and L. Halpern, *Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equation and Parallel Computing*, Math. of Comp., 2004.
- Onde non linéaire,  L. Halpern and J. Szeftel., *Nonlinear Schwarz Waveform Relaxation for Semilinear Wave Propagation*, Math. Comp., 2009



MAXWELL

-  V. Dolean, M. El Bouajaji, M.J. Gander and S. Lanteri, *Optimized Schwarz Methods for Maxwell's Equations*, Lecture Notes in CSE, 2010.
-  Y. Courvoisier, M.J. Gander, *Time domain Maxwell equations and Schwarz Waveform Relaxation methods*, Lecture Notes in CSE, 2012.

SCHRÖDINGER

- Linéaire,  L. Halpern and J. Szeftel. *Optimized and Quasi-Optimal Schwarz Waveform Relaxation for the One Dimensional Schrödinger*, M3AS, 2010.
- Linéaire + potentiels,  X. Antoine, E. Lorin, A.D. Bandrauk, *Domain Decomposition Methods and High-Order Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of the Time Dependent Schrödinger Equation with Ionization and Recombination by Intense Electric Field*, JCP, 2014.
- Linéaire + potentiels + nonlinéaire multi-D,  C. Besse, F. Xing 2014.

FLUIDES

-  V. Martin, *Schwarz Waveform Relaxation Algorithms for the Linear Viscous Equatorial Shallow Water Equations*, SIAM J. Sci. Comput., 2009
-  E. Audusse, P. Dreyfuss, B. Merlet, *Schwartz wave form relaxation for primitive equations of the ocean*, SIAM J. Sci. Comput. 2010.

- 1 RAPPELS
- 2 HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE RELAXATION D'ONDES
- 3 LA MÉTHODE SWR
- 4 PROPRIÉTÉS
- 5 DÉVELOPPEMENTS
- 6 MISE EN ŒUVRE

- $\Omega = (a_0, b_0)$, $\Omega^- = \Omega_1 = (a_1 = a_0, b_1)$, $\Omega^+ = \Omega_2 = (a_2, b_2 = b_0)$
- Ω divisé en N intervalles de longueur $\Delta x = X/N$
- $[0, T]$ divisé en N_T intervalles de longueur $\Delta t = T/N_{\text{iter}}$
- $u_{i,j,n}^k$ approximation de $u_i^k(x_j, t_n)$, domaine Ω_i , itération k , point $x_j = a + (j - 1)\Delta x$, $1 \leq j \leq N + 1$, et $t_n = n\Delta$.

On s'intéresse au problème

$$\partial_t u + a \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = f$$

avec $a > 0$, $\nu > 0$, $u(a_0, t) = g_l$ et $\partial u(b_0, t) = g_r$.

Schéma numérique : Crank-Nicolson

$$\frac{2}{\Delta t} v_{j,n+1/2} + a (\partial_x v)_{j,n+1/2} - \nu (\partial_x^2 v)_{j,n+1/2} = f_{j,n+1/2} + \frac{2}{\Delta t} u_{j,n},$$

où $v_{j,n+1/2} = \frac{u_{j,n+1} + u_{j,n}}{2}$.

- $(\partial_x v)_{j,n+1/2} = \frac{1}{2\Delta x} (v_{j+1,n+1/2} - v_{j-1,n+1/2})$.
- $(\partial_x^2 v)_{j,n+1/2} = \frac{1}{\Delta x^2} (v_{j+1,n+1/2} - 2v_{j,n+1/2} + v_{j-1,n+1/2})$.

Prise en compte des conditions aux limites

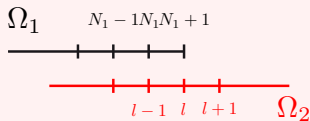
- En a_0 : $v_{1,n+1/2} = g_0$.
- En b_0 : introduction d'un point fictif $j = N + 2$. On a

$$\frac{1}{2\Delta x} (v_{N+n+1/2} - v_{N,n+1/2}) = g_{r,n+1/2}.$$

On injecte la valeur obtenue de $v_{N+2,n+1/2}$ dans le schéma numérique écrit au point $N + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} v_{N+1,n+1/2} - 2\nu \frac{v_{N,n+1/2} - v_{N+1,n+1/2}}{\Delta x^2} &= f_{N+1,n+1/2} + \frac{2}{\Delta t} u_{N+1,n} \\ &+ \left(\frac{2\nu}{\Delta x} - a \right) g_{r,n+1/2}. \end{aligned}$$

Prise en compte des conditions de transmission : traitement de Ω_1



$$\partial_x u_1^k - \frac{a-p}{2\nu} u_1^k = \partial_x u_2^{k-1} - \frac{a-p}{2\nu} u_2^{k-1}, \quad x = b_1$$

Point imaginaire $N_1 + 2$

$$\frac{u_{1,N_1+2,n+1/2}^k - u_{1,N_1,n+1/2}^k}{2\Delta x} - \frac{a-p}{\nu} u_{1,N_1+1,n+1/2}^k = \frac{u_{2,l+1,n+1/2}^{k-1} - u_{2,Nl-1,n+1/2}^{k-1}}{2\Delta x} - \frac{a-p}{\nu} u_{2,l,n+1/2}^{k-1}$$

et on remplace la valeur de $u_{1,N_1+2,n+1/2}^k$ dans le schéma numérique.

Si on considère l'équation de la chaleur $a = 0$, on a la condition de transmission exacte

$$\partial_n u + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \partial_t^{1/2} u = 0$$

Alors, le schéma prend la forme

$$\frac{u_{1,N_1+2,n+1/2}^k - u_{1,N_1,n+1/2}^k}{2\Delta x} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{m=0}^{n+1} \beta_{n+1-m} u_{1,N_1+1,n+1/2}^k =$$

$$\frac{u_{2,l+1,n+1/2}^{k-1} - u_{2,l-1,n+1/2}^k}{2\Delta x} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{m=0}^{n+1} \beta_{n+1-m} u_{2,l,n+1/2}^{k-1}.$$

et on remplace la valeur de $u_{1,N_1+2,n+1/2}^k$ dans le schéma numérique.

$$b_1 = a_2$$

Domaine Ω_1 : $v \in H_0^1(\Omega_1)$ (ici, on prend $g_l = 0$ et $H_0^1(\Omega_1)$ désigne les éléments de $H^1(\Omega_1)$ à trace nulle en a_1).

$$\int_{\Omega_1} \partial_t u_1^k v \, dx + \int_{\Omega_1} \nabla u_1^k \cdot \nabla v \, dx - \partial_x u_1^k(b_1)v(b_1) = \int_{\Omega_1} f v \, dx.$$

Condition de transmission

$$\partial_x u_1^k - \frac{a-p}{2\nu} u_1^k = \partial_x u_2^{k-1} - \frac{a-p}{2\nu} u_2^{k-1}, \quad x = b_1$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \partial_t u_1^k v \, dx + \int_{\Omega_1} \nabla u_1^k \cdot \nabla v \, dx - \frac{a-p}{2\nu} u_1^k(b_1)v(b_1) \\ = \int_{\Omega_1} f v \, dx - \partial_x u_2^{k-1}(b_1)v(b_1) + \frac{a-p}{2\nu} u_2^{k-1}(b_1)v(b_1). \end{aligned}$$

On ne calcule pas $\partial_x u_2^{k-1}(b_1)$. On stocke la valeur en mémoire par la formule d'itération en k

$$\partial_x u_2^k = \frac{a+p}{2\nu} u_2^k + \partial_x u_1^{k-1} - \frac{a+p}{2\nu} u_1^{k-1}, \quad x = a_2.$$