Introduction aux méthodes de Schwarz

Véronique Martin
veronique.martin@u-picardie.fr

LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, France

Motivations

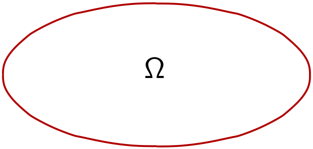
Contexte : Discrétiser une EDP par FEM, FD, FV, etc. mène à un système linéaire $AX = b$.

La décomposition de domaine est une méthode qui permet de résoudre plus efficacement ce problème algébrique en le parallèlisant.

Motivations

Contexte : Discrétiser une EDP par FEM, FD, FV, etc. mène à un système linéaire $AX = b$.

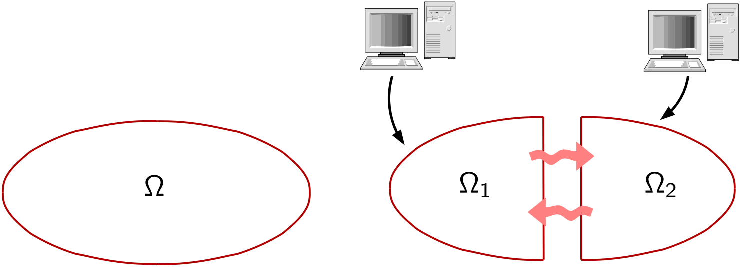
La décomposition de domaine est une méthode qui permet de résoudre plus efficacement ce problème algébrique en le parallèlisant.



Motivations

Contexte : Discrétiser une EDP par FEM, FD, FV, etc. mène à un système linéaire $AX = b$.

La décomposition de domaine est une méthode qui permet de résoudre plus efficacement ce problème algébrique en le parallèlisant.



Outline

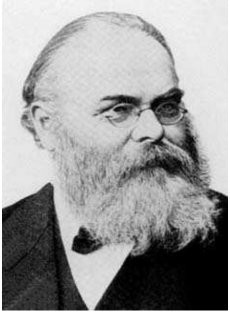
Références

- B.F. Smith, P.E. Bjørstad, W.D. Gropp (1996): *Domain Decomposition*. Cambridge University Press, Cambridge.
- A. Quarteroni and A. Valli (1999): *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Science Publications, Oxford.
- A. Toselli and O.B. Widlund (2005): *Domain Decomposition Methods-Algorithms and Theory*. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg.
- M.J. Gander *Schwarz Methods over the Course of Time*, ETNA, Vol. 31, pp. 228-255, 2008.
- M.J. Gander, L. Halpern. *Méthodes de décomposition de domaines*, Encyclopédie des Techniques de l'Ingénieur, 2012.

Outline

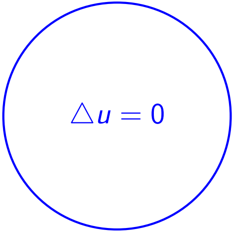
Outline

Hermann Amandus Schwarz 1843-1921

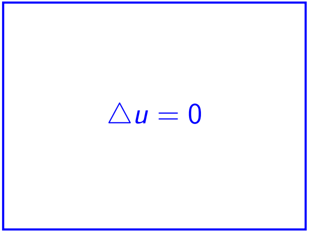


- 1857 Riemann: *Théorème de l'application conforme.*
- 1869 Weierstrass: *Contre-exemple au Principe de Dirichlet.*
- 1870 Schwarz: *Méthode alternée.*

Ce que l'on sait faire en 1870

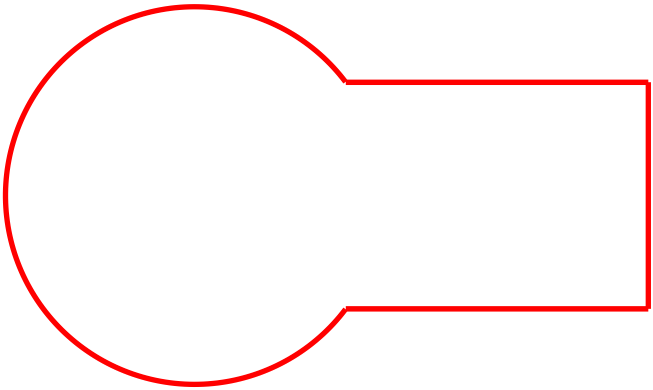


Poisson (1815)

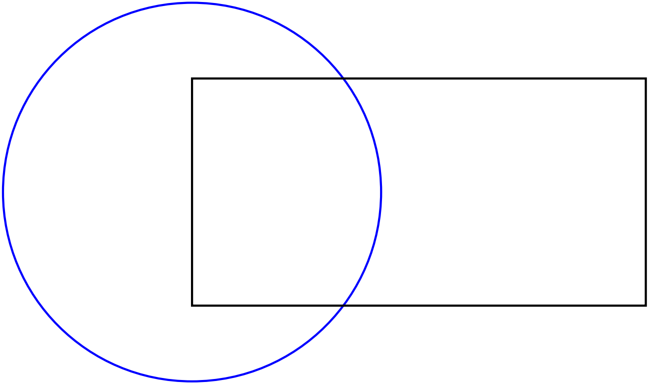


Fourier (1807)

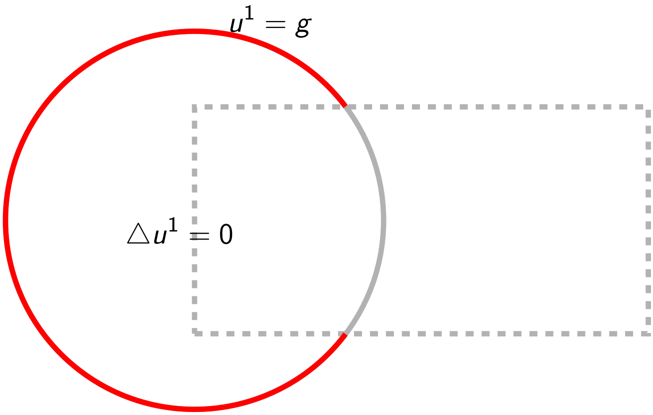
Méthode de Schwarz originale



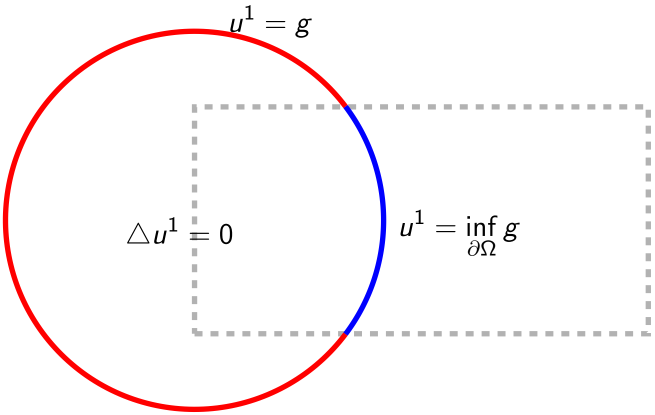
Méthode de Schwarz originale



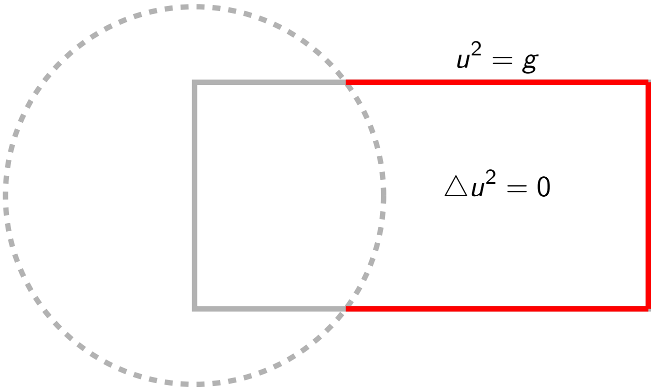
Méthode de Schwarz originale



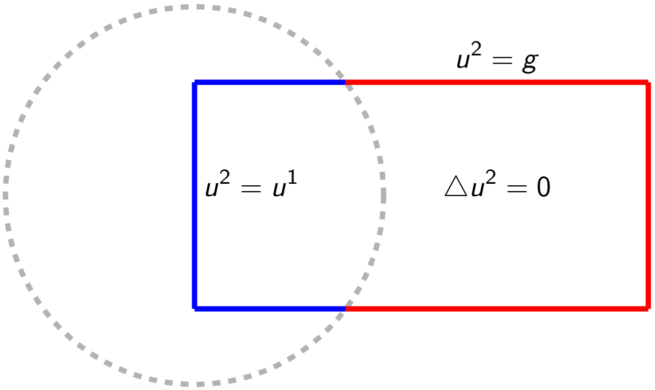
Méthode de Schwarz originale



Méthode de Schwarz originale



Méthode de Schwarz originale



Schwarz en continu

Schwarz alterné (Schwarz 1870):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Schwarz en continu

Schwarz alterné (Schwarz 1870):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

- Méthode étudiée par Sobolev, Courant, Hilbert, Browder...
- Miller (1965) utilise Schwarz alterné pour une résolution numérique.
- P.L. Lions (1988-1990) étudie l'algorithme de Schwarz:
  - Principe du maximum repris.
  - Arguments variationnels.
  - Cas N sous-domaines.
  - Proposition d'un algorithme parallèle.
  - Proposition d'un algorithme sans recouvrement.

Schwarz en continu

Schwarz alterné (Schwarz 1870):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Schwarz parallèle (Lions 1988):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Schwarz en continu

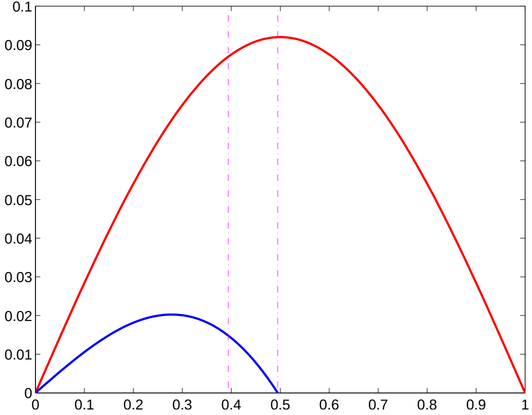
Schwarz alterné (Schwarz 1870):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

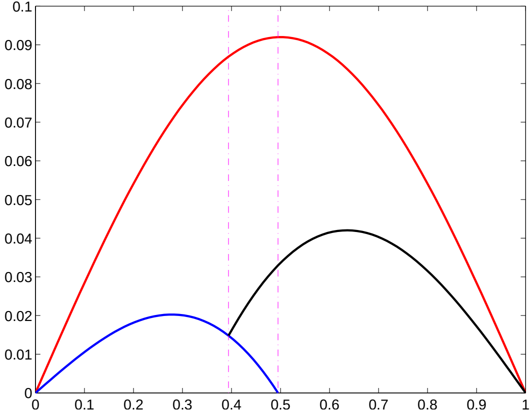
Schwarz parallèle (Lions 1988):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

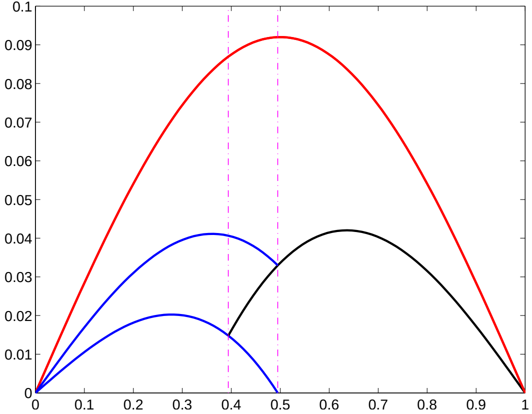
Schwarz alterné



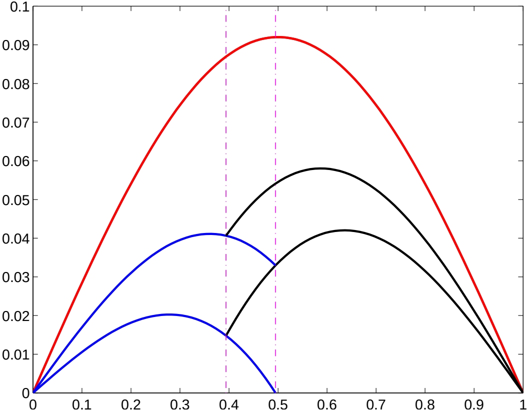
Schwarz alterné



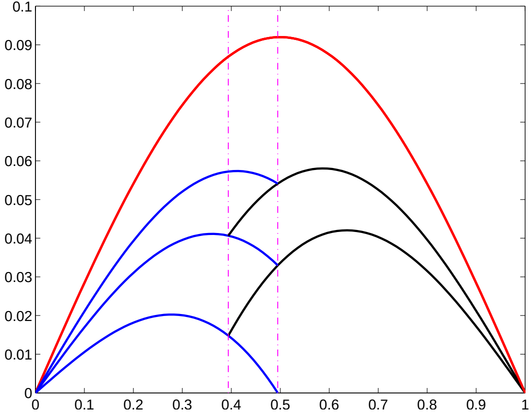
Schwarz alterné



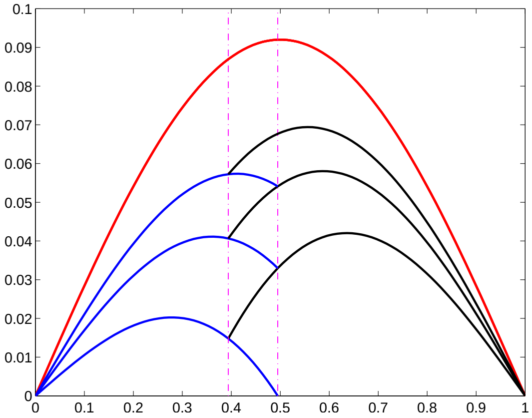
Schwarz alterné



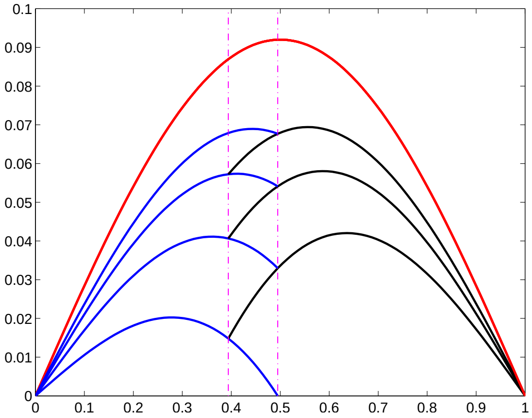
Schwarz alterné



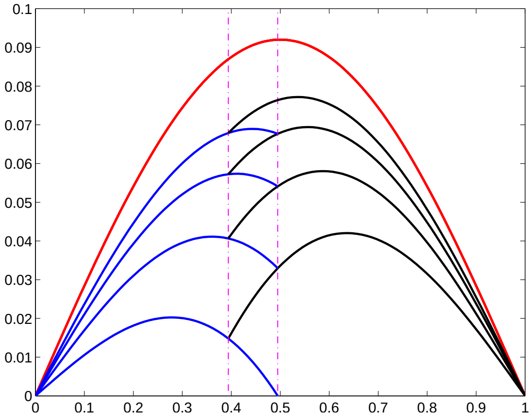
Schwarz alterné



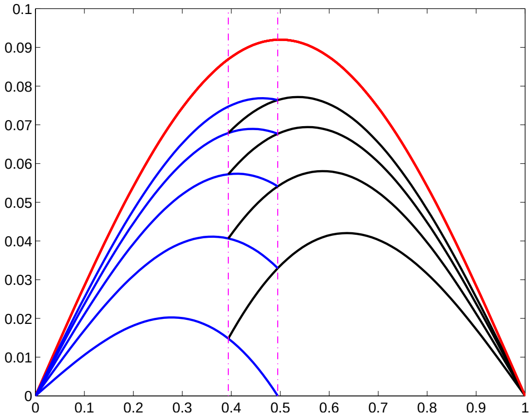
Schwarz alterné



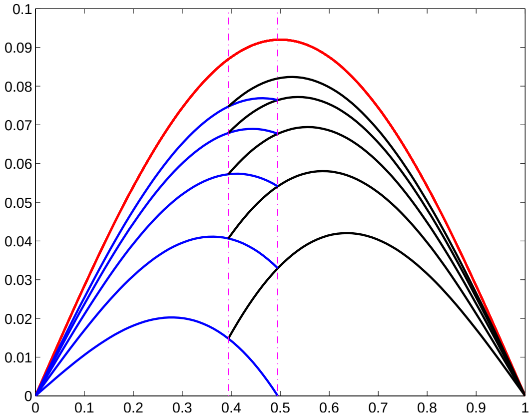
Schwarz alterné



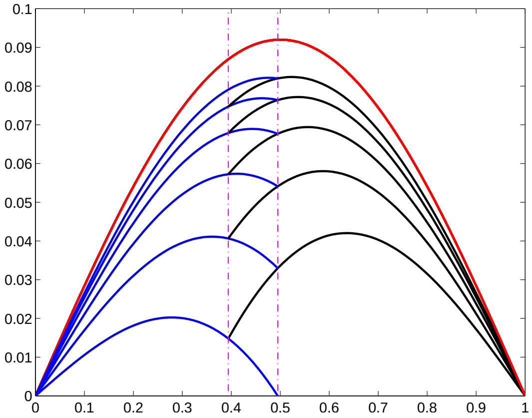
Schwarz alterné



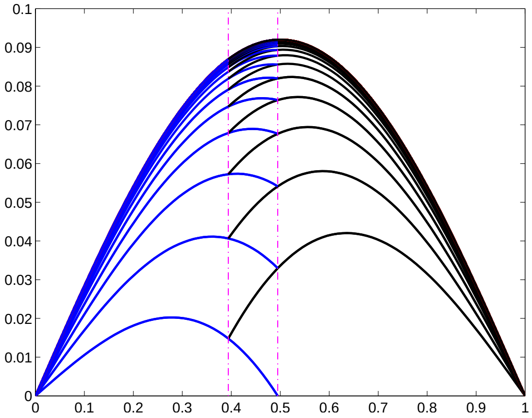
Schwarz alterné



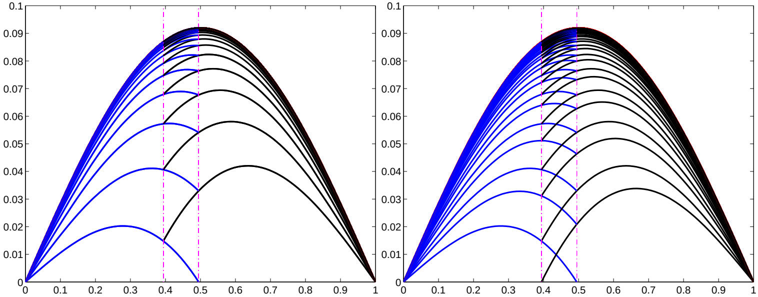
Schwarz alterné



Schwarz alterné



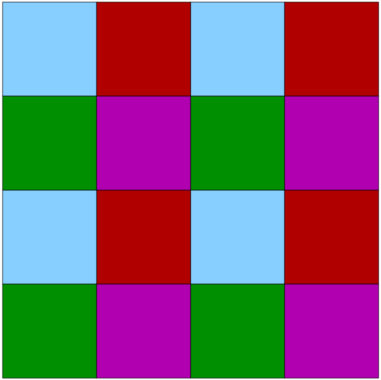
Alterné versus Parallèle



Alterné

Parallèle

Schwarz Alterné peut être aussi parallèlisé



Démonstration de la convergence en 1D

Solution globale:

$$(-d_{xx}+\alpha)u = f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Schwarz parallèle:

$$\begin{cases} (-d_{xx}+\alpha)u_1^{n+1} = f \text{ sur }]-\infty, d[, \\ u_1^{n+1}(d) = u_2^n(d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-d_{xx}+\alpha)u_2^{n+1} = f \text{ sur }]0, +\infty[, \\ u_2^{n+1}(0) = u_1^n(0) \end{cases}$$

Démonstration de la convergence en 1D

Solution globale:

$$(-d_{xx}+\alpha)u = f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Schwarz parallèle: $e_i^n = u - u_i^n$

$$\begin{cases} (-d_{xx}+\alpha)e_1^{n+1} = 0 \text{ sur }]-\infty, d[, \\ e_1^{n+1}(d) = e_2^n(d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-d_{xx}+\alpha)e_2^{n+1} = 0 \text{ sur }]0, +\infty[, \\ e_2^{n+1}(0) = e_1^n(0) \end{cases}$$

Taux de convergence

$$\rho = \left| \frac{e_1^{n+1}(x_0)}{e_1^{n-1}(x_0)} \right|$$

Démonstration de la convergence en 2D

Solution globale:

$$(-\triangle + \alpha)u = f \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Schwarz alterné:

$$\begin{cases} (-\triangle + \alpha)u_1^{n+1} = f \text{ sur }]-\infty, d[\times\mathbb{R}, \\ u_1^{n+1}(d,\cdot) = u_2^n(d,\cdot) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\triangle + \alpha)u_2^{n+1} = f \text{ sur }]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \\ u_2^{n+1}(0,\cdot) = u_1^n(0,\cdot) \end{cases}$$

Démonstration de la convergence en 2D

Solution globale:

$$(-\triangle + \alpha)u = f \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Schwarz alterné: $e_i^n = u - u_i^n$

$$\begin{cases} (-\triangle + \alpha)e_1^{n+1} = 0 \text{ sur }]-\infty, d[\times\mathbb{R}, \\ e_1^{n+1}(d,\cdot) = e_2^n(d,\cdot) \end{cases}$$

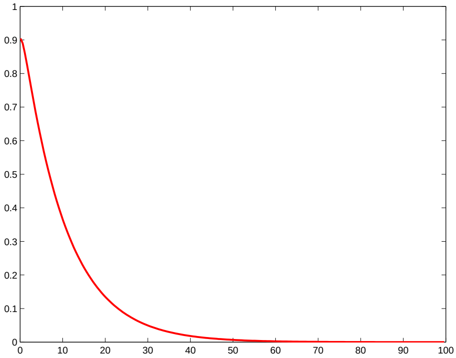
$$\begin{cases} (-\triangle + \alpha)e_2^{n+1} = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \\ e_2^{n+1}(0,\cdot) = e_1^n(0,\cdot) \end{cases}$$

Taux de convergence:

$$\rho(k) = \left| \frac{\hat{e}_1^{n+1}(x_0, k)}{\hat{e}_1^{n-1}(x_0, k)} \right|$$

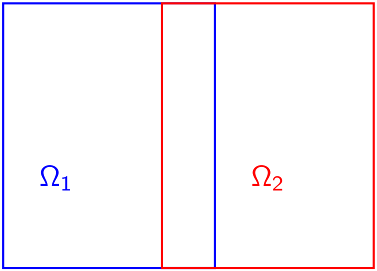
Taux de convergence

$$\rho(\alpha, k, d) = e^{-2d\sqrt{\alpha+k^2}}$$



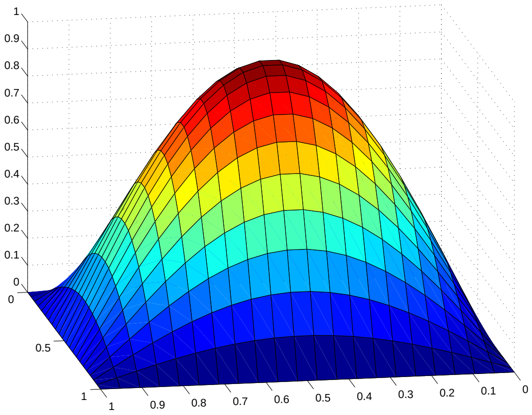
$\Longrightarrow$ Convergence rapide pour les hautes fréquences, lente pour les basses.

Schwarz alterné en 2D

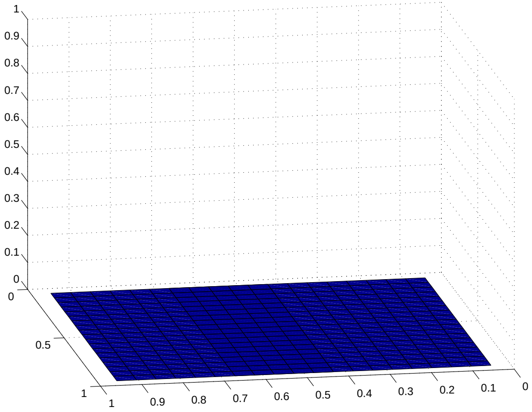


$$\begin{cases} \triangle u = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

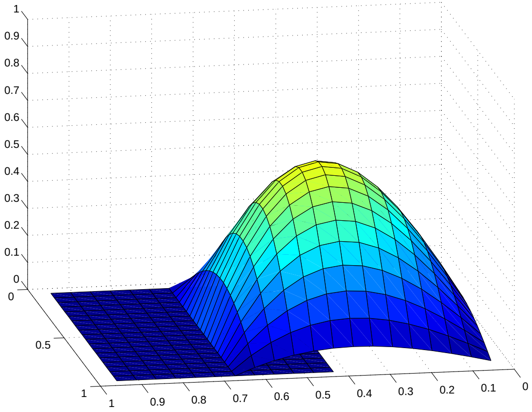
Schwarz alterné en 2D



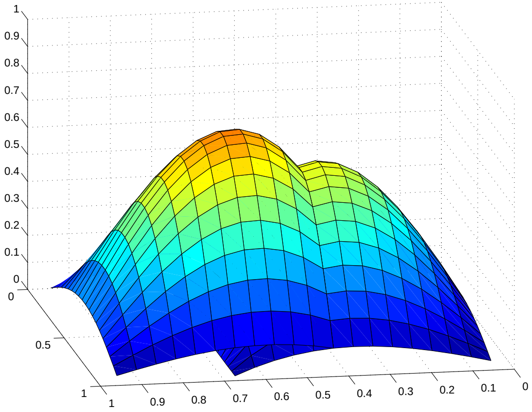
Schwarz alterné en 2D



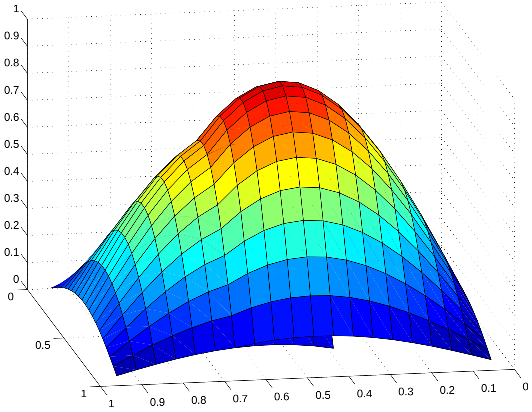
Schwarz alterné en 2D



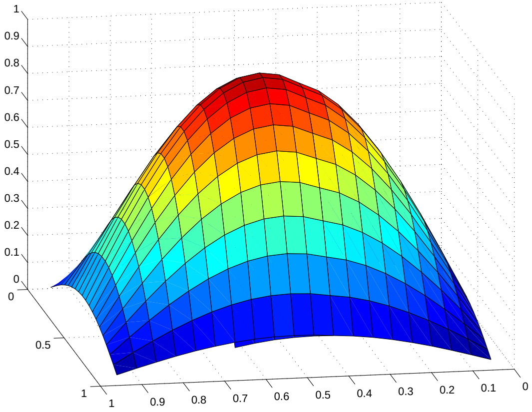
Schwarz alterné en 2D



Schwarz alterné en 2D



Schwarz alterné en 2D



Outline

Au niveau discret

L'équation:

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = g_1 \\ u(1) = g_2 \end{cases}$$

Approximation de la dérivée seconde pour $h << 1$:

$$-u''(x) \simeq \frac{1}{h^2}(2u(x) - u(x+h) - u(x-h))$$

Différences finies:

$$\begin{cases} u_0 = g_1 \\ \dfrac{1}{h^2}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) = f(x_i), \; 1 \leq i \leq n \\ u_{n+1} = g_2 \end{cases}$$

Au niveau discret

Discrétisation du Laplacien 1D par différences finies:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Au niveau discret

Discrétisation du Laplacien 1D par différences finies:

$$A = \frac{1}{h^2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & -1 & & & & & & \\
-1 & 2 & \ddots & & & & & \\
& \ddots & \ddots & -1 & & & & \\
& & -1 & 2 & -1 & & & \\
\hline
& & & -1 & 2 & -1 & & \\
& & & & -1 & 2 & \ddots & \\
& & & & & \ddots & \ddots & -1 \\
& & & & & & -1 & 2
\end{array}\right)$$

Au niveau discret

Discrétisation du Laplacien 1D par différences finies:

$$A = \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline B_2 & A_2 \end{array} \right)$$

Méthode itérative

Méthode itérative de type point fixe:

$$AU = b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

On écrit $A = M - N$:

$$MU \quad = NU \; + b$$

Méthode itérative

Méthode itérative de type point fixe:

$$AU = b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

On écrit $A = M - N$:

$$MU^{n+1} = NU^n + b$$

Méthode itérative

Méthode itérative de type point fixe:

$$AU = b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

On écrit $A = M - N$:

$$MU^{n+1} = NU^n + b$$

Choix de la matrice M:

- $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Jacobi
- $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Gauss Seidel

Méthode de Gauss-Seidel par bloc

Gauss-Seidel par bloc:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} U^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^n + b$$

que l'on peut réécrire:

$$U_1^{n+1} = U_1^n + A_1^{-1}(b_1 - A_1 U_1^n - B_1 U_2^n)$$
$$U_2^{n+1} = U_2^n + A_2^{-1}(b_2 - B_2 U_1^{n+1} - A_2 U_2^n)$$

ou encore

$$\begin{cases} U^{n+1/2} = U^n + \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (b - AU^n) \\ U^{n+1} = U^{n+1/2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} (b - AU^{n+1/2}) \end{cases}$$

Méthode de Gauss-Seidel par bloc

Gauss-Seidel par bloc:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} U^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^n + b$$

que l'on peut réécrire:

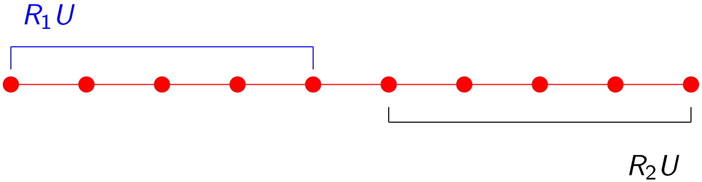
$$\begin{aligned} U_1^{n+1} &= U_1^n + A_1^{-1}(b_1 - A_1 U_1^n - B_1 U_2^n) \\ U_2^{n+1} &= U_2^n + A_2^{-1}(b_2 - B_2 U_1^{n+1} - A_2 U_2^n) \end{aligned}$$

ou encore

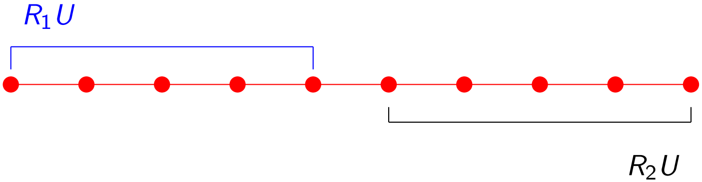
$$\begin{cases} U^{n+1/2} = U^n + \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (b - AU^n) \\ U^{n+1} = U^{n+1/2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} (b - AU^{n+1/2}) \end{cases}$$

Opérateurs de restriction

Opérateurs de restriction



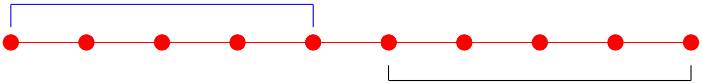
Opérateurs de restriction



$$R_1 U = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_{a-1} \\ u_a \\ u_{a+1} \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ u_a \end{pmatrix}$$

Opérateurs de restriction

$R_1 U$



$R_2 U$

$$R_2 U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{blue}{u_1} \\ \cdots \\ \color{blue}{u_{a-1}} \\ \color{blue}{u_a} \\ \color{red}{u_{a+1}} \\ \color{red}{\cdots} \\ \color{red}{u_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{u_{a+1}} \\ \color{red}{\cdots} \\ \color{red}{\cdots} \\ \color{red}{u_n} \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss-Seidel par bloc

Gauss-Seidel par bloc:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} U^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^n + b$$

que l'on peut réécrire:

$$U_1^{n+1} = U_1^n + A_1^{-1}(b_1 - A_1 U_1^n - B_1 U_2^n)$$
$$U_2^{n+1} = U_2^n + A_2^{-1}(b_2 - B_2 U_1^{n+1} - A_2 U_2^n)$$

ou encore

$$\begin{cases} U^{n+1/2} = U^n + \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(b - AU^n) \\ U^{n+1} = U^{n+1/2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}(b - AU^{n+1/2}) \end{cases}$$

Méthode de Gauss-Seidel par bloc

Gauss-Seidel par bloc:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} U^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^n + b$$

que l'on peut réécrire:

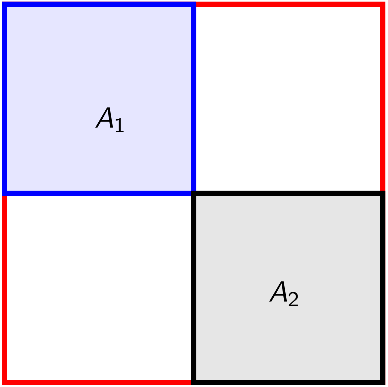
$$\begin{aligned} U_1^{n+1} &= U_1^n + A_1^{-1}(b_1 - A_1 U_1^n - B_1 U_2^n) \\ U_2^{n+1} &= U_2^n + A_2^{-1}(b_2 - B_2 U_1^{n+1} - A_2 U_2^n) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{cases} U^{n+1/2} = U^n + \;\; R_1^t A_1^{-1} R_1 \, (b - AU^n) \\ \\ U^{n+1} = U^{n+1/2} + \;\; R_2^t A_2^{-1} R_2 (b - AU^{n+1/2}) \end{cases}$$

Schwarz multiplicatif

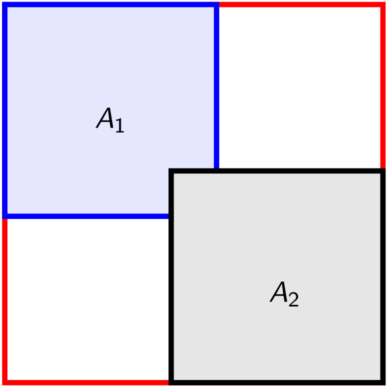
Idée de Schwarz multiplicatif: mêmes itérations mais avec recouvrement algébrique:



Sans recouvrement

Schwarz multiplicatif

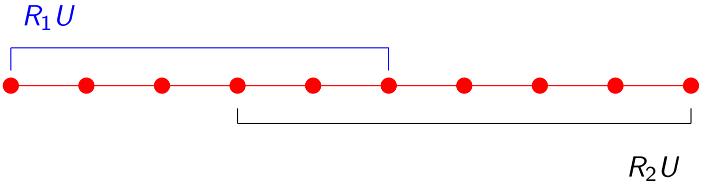
Idée de Schwarz multiplicatif: mêmes itérations mais avec recouvrement algébrique:



Avec recouvrement

Schwarz multiplicatif (MS)

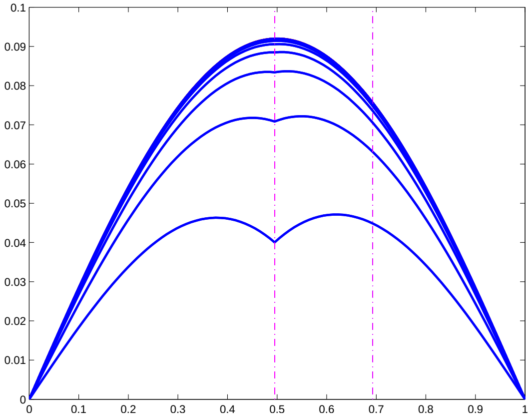
Opérateurs de restriction avec recouvrement



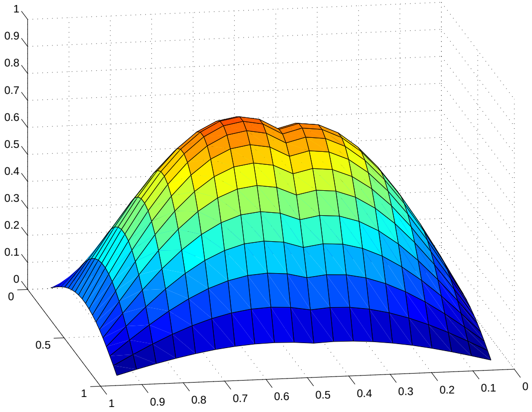
Schwarz multiplicatif:

$$\begin{cases} U^{n+1/2} = U^n + R_1^t A_1^{-1} R_1 (b - AU^n) \\ U^{n+1} = U^{n+1/2} + R_2^t A_2^{-1} R_2 (b - AU^{n+1/2}) \end{cases}$$

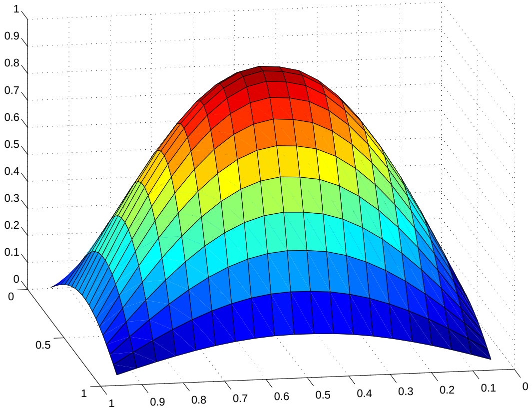
Schwarz multiplicatif



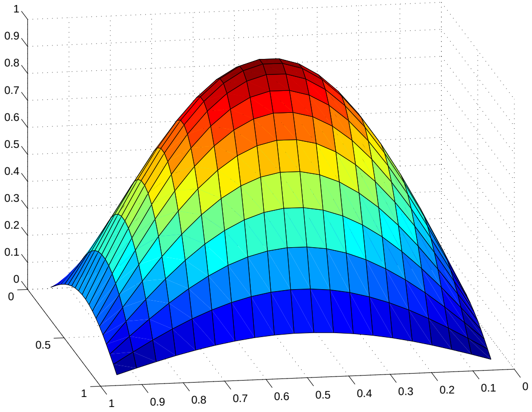
Schwarz multiplicatif en 2D



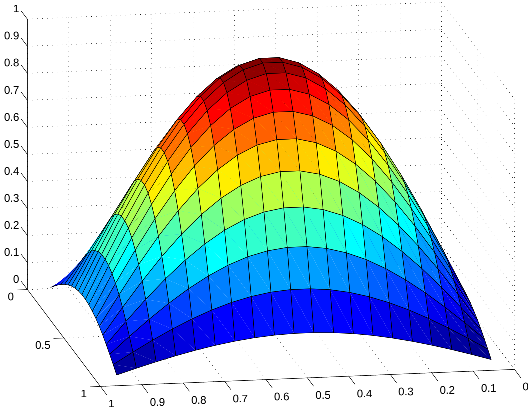
Schwarz multiplicatif en 2D



Schwarz multiplicatif en 2D



Schwarz multiplicatif en 2D



Jacobi par bloc

Problème discret:

$$AU = b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

On écrit $A = M - N$:

$$MU \quad = NU \; + b$$

Jacobi par bloc

Problème discret:

$$AU = b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

On écrit $A = M - N$:

$$MU^{n+1} = NU^n + b$$

Jacobi par bloc

Problème discret:

$$AU = b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

On écrit $A = M - N$:

$$MU^{n+1} = NU^n + b$$

Jacobi par bloc:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} U^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 \\ -B_2 & 0 \end{pmatrix} U^n + b$$

que l'on peut réécrire:

$$\begin{cases} U_1^{n+1} = U_1^n + A_1^{-1}(b - AU^n)_1 \\ U_2^{n+1} = U_2^n + A_2^{-1}(b - AU^n)_2 \end{cases}$$

Schwarz additif

Jacobi par bloc:

$$U^{n+1} = U^n + \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} (b - AU^n)$$

Réécriture avec ou sans recouvrement:

$$U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n)$$

Problème: ça ne converge pas!

Schwarz additif

Jacobi par bloc:

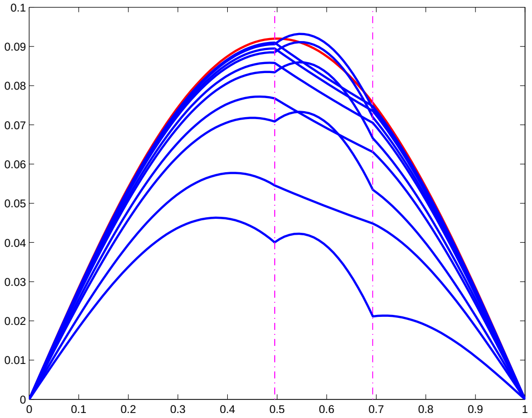
$$U^{n+1} = U^n + \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} (b - AU^n)$$

Réécriture avec ou sans recouvrement:

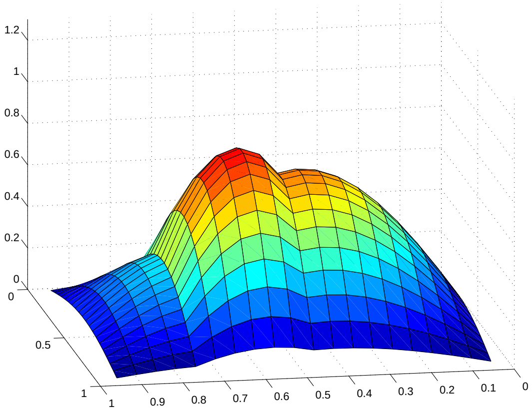
$$U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n)$$

Problème: ça ne converge pas!

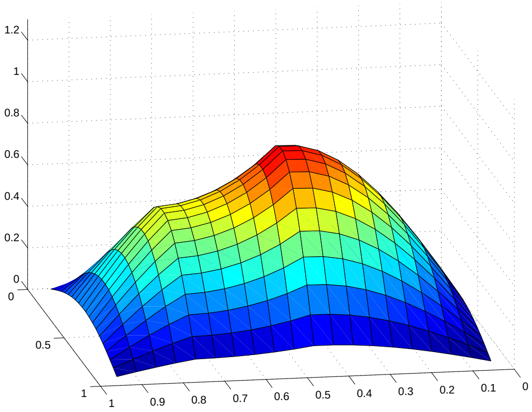
Schwarz additif



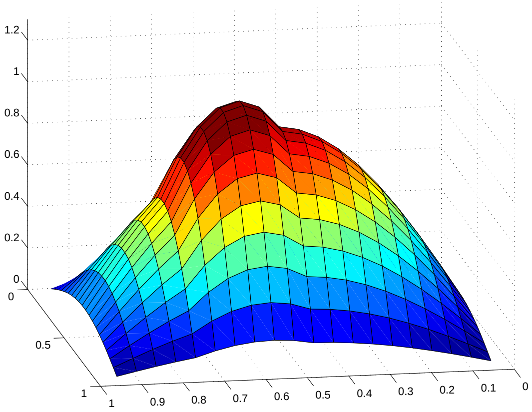
Schwarz additif en 2D



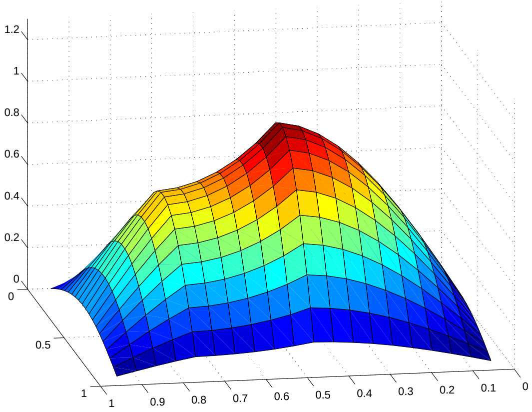
Schwarz additif en 2D



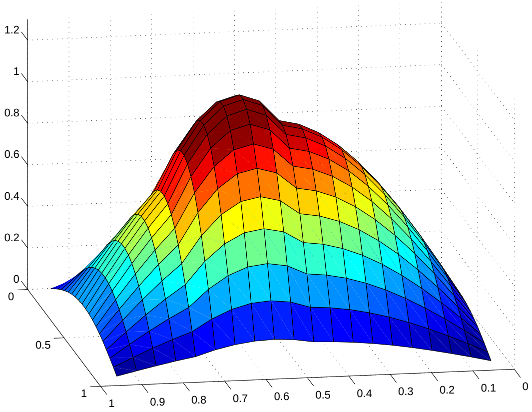
Schwarz additif en 2D



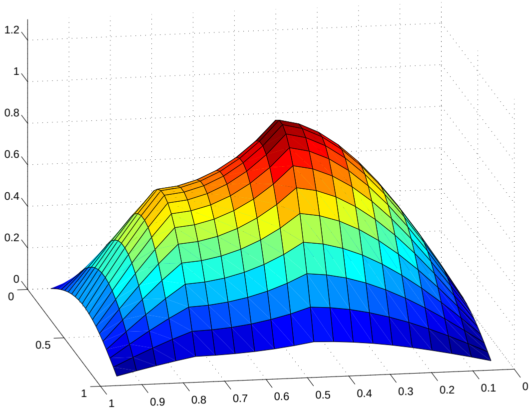
Schwarz additif en 2D



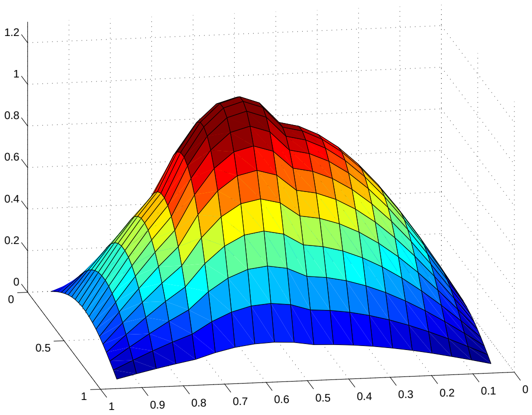
Schwarz additif en 2D



Schwarz additif en 2D



Schwarz additif en 2D



Schwarz additif ne converge pas

Schwarz Additif:

$$U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n)$$

Décomposition selon le premier sous-domaine:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ X_1 & Y_1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \overline{U}_2 \end{pmatrix}$$

Décomposition selon le deuxième sous-domaine:

$$A = \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Restricted Additive Schwarz

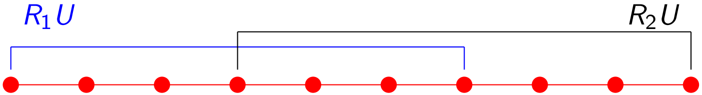
Cai et Sarkis (1998):

> *"While working on a AS/GMRES algorithm in an Euler simulation, we removed part of the communication routine and surprisingly the "then AS" method converged faster in both terms of iteration counts and CPU time."*

Restricted Additive Schwarz

Cai et Sarkis (1998):

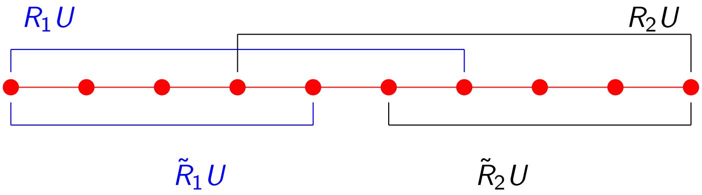
> *"While working on a AS/GMRES algorithm in an Euler simulation, we removed part of the communication routine and surprisingly the "then AS" method converged faster in both terms of iteration counts and CPU time."*



Restricted Additive Schwarz

Cai et Sarkis (1998):

> *"While working on a AS/GMRES algorithm in an Euler simulation, we removed part of the communication routine and surprisingly the "then AS" method converged faster in both terms of iteration counts and CPU time."*



Restricted Additive Schwarz

Schwarz Additif

$$U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n)$$

Restricted Additive Schwarz

$$U^{n+1} = U^n + (\tilde{R}_1^t A_1^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n)$$

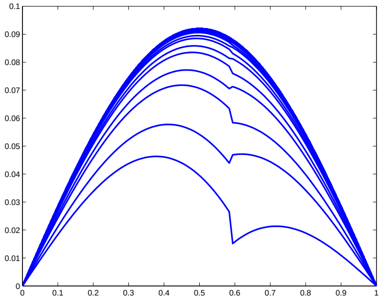
Restricted Additive Schwarz

Schwarz Additif

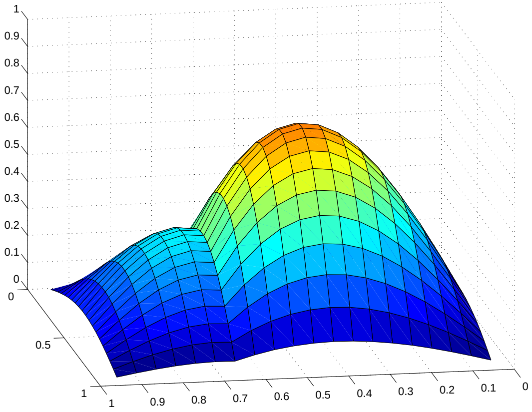
$$U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n)$$

Restricted Additive Schwarz

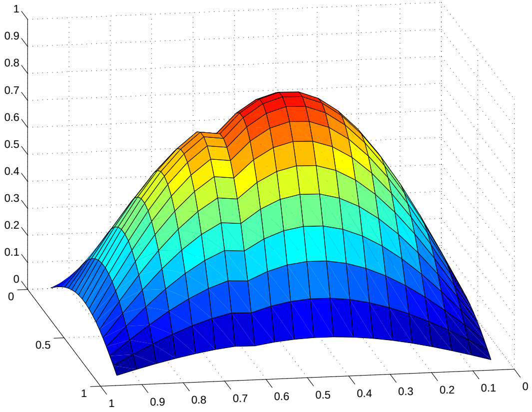
$$U^{n+1} = U^n + (\tilde{R}_1^t A_1^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n)$$



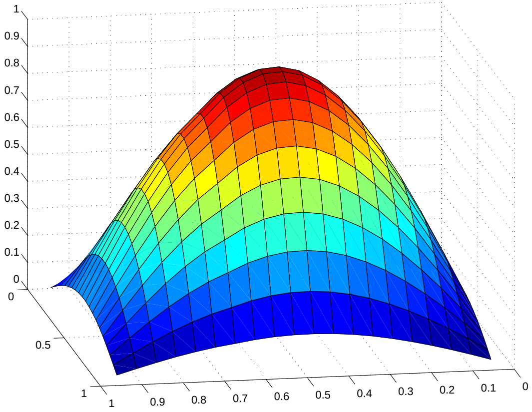
Schwarz RAS en 2D



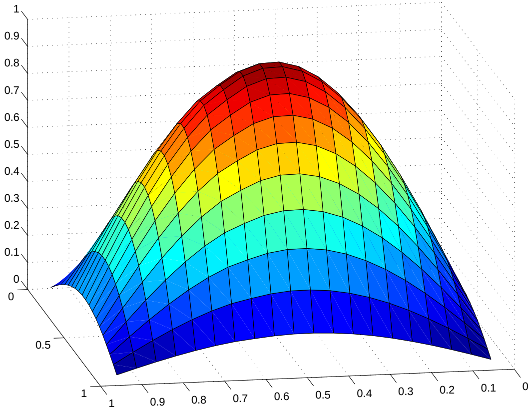
Schwarz RAS en 2D



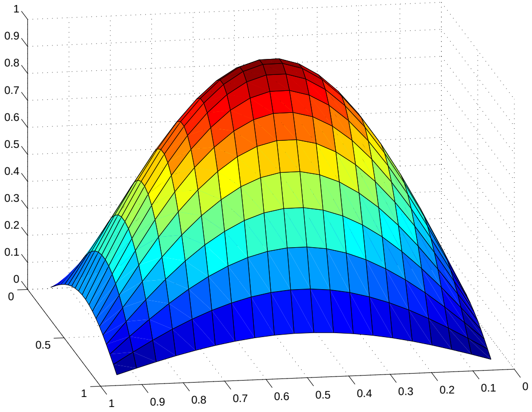
Schwarz RAS en 2D



Schwarz RAS en 2D



Schwarz RAS en 2D



Lien continu/discret

Continu	Schwarz Alterné (Schwarz 1870)	Schwarz parallèle (Lions 1988)
Discret	MS	AS $\longrightarrow$ RAS

Lien continu/discret

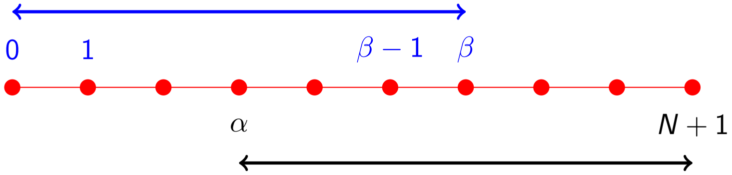
Continu	Schwarz Alterné (Schwarz 1870)	Schwarz parallèle (Lions 1988)
Discret	MS	AS $\longrightarrow$ RAS

Lien continu/discret

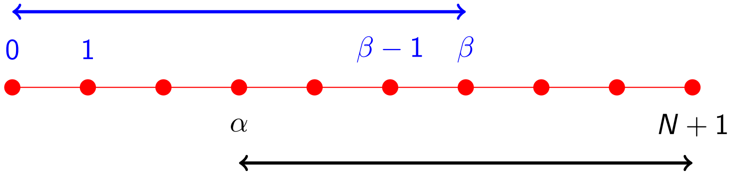
Continu	Schwarz Alterné (Schwarz 1870)	Schwarz parallèle (Lions 1988)
Discret	MS	AS $\longrightarrow$ RAS

Référence: *Why Restricted Additive Schwarz Converges Faster than Additive Schwarz*, E. Efstathiou and M.J. Gander, BIT Numerical Mathematics. 2002.

Schwarz alterné



Schwarz alterné



$$A_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_{\beta-1} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_{\beta-1} + \dfrac{1}{h^2} w_\beta^n \end{pmatrix}$$

$$A_2 \begin{pmatrix} w_{\alpha+1} \\ \cdots \\ w_N \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} b_{\alpha+1} + \dfrac{1}{h^2} v_\alpha^{n+1} \\ \cdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

Matrice Laplacien

$$A = \frac{1}{h^2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & -1 & & & & & & \\
-1 & 2 & \ddots & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & -1 & & & & \\
 & & -1 & 2 & -1 & & & \\
\hline
 & & & -1 & 2 & -1 & & \\
 & & & & -1 & 2 & \ddots & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & -1 \\
 & & & & & & -1 & 2
\end{array}\right)$$

Outline

Outline

Conditionnement de la matrice du Laplacien

Définition du conditionnement de A:

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

Si A est symétrique, définie positive:

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

Valeurs propres du Laplacien:

$$\lambda_j = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{j\pi h}{2}\right), \ 1 \leq j \leq N.$$

Conditionnement du Laplacien:

$$\kappa_2(A) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi h}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)} \simeq \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{h^2}.$$

Conditionnement de la matrice du Laplacien

Définition du conditionnement de A:

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

Si A est symétrique, définie positive:

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

Valeurs propres du Laplacien:

$$\lambda_j = \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{j\pi h}{2}),\ 1 \leq j \leq N.$$

Conditionnement du Laplacien:

$$\kappa_2(A) = \frac{\sin^2(\frac{N\pi h}{2})}{\sin^2(\frac{\pi h}{2})} \simeq \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{h^2}.$$

Vitesse de convergence et conditionnement

Vitesse de convergence du point fixe : $U^{n+1} = U^n + \lambda(b - AU^n)$:

$$\frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} = 1 - \mathcal{O}(h^2).$$

Vitesse de convergence du gradient conjugué:

$$\frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1} = 1 - \mathcal{O}(h).$$

Vitesse de convergence et conditionnement

Vitesse de convergence du point fixe :
$U^{n+1} = U^n + \lambda(b - AU^n)$:

$$\frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1} = 1 - \mathcal{O}(h^2).$$

Vitesse de convergence du gradient conjugué:

$$\frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1} = 1 - \mathcal{O}(h).$$

Idée: préconditionner le système:

$$M^{-1}AX = M^{-1}b,$$

avec $\kappa_2(M^{-1}A) << \kappa_2(A)$.

Outline

Méthode de point fixe

Méthode du point fixe:

$$U^{n+1} = U^n + M^{-1}(b - AU^n)$$

Méthodes de décomposition de domaine

$$\begin{aligned} AS: \quad & U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n) \\ RAS: \quad & U^{n+1} = U^n + (\tilde{R}_1^t A_1^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Ce sont des méthodes de point fixe sur le système préconditionné.

Idée:

Utiliser une méthode de Krylov sur ce même système préconditionné.

Méthode de point fixe

Méthode du point fixe:

$$U^{n+1} = U^n + M^{-1}(b - AU^n)$$

Méthodes de décomposition de domaine

$$\begin{aligned} AS: \quad & U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n) \\ RAS: \quad & U^{n+1} = U^n + (\tilde{R}_1^t A_1^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Ce sont des méthodes de point fixe sur le système préconditionné.

Idée:

Utiliser une méthode de Krylov sur ce même système préconditionné.

Méthode de point fixe

Méthode du point fixe:

$$U^{n+1} = U^n + M^{-1}(b - AU^n)$$

Méthodes de décomposition de domaine

$$\begin{aligned} AS: \quad & U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n) \\ RAS: \quad & U^{n+1} = U^n + (\tilde{R}_1^t A_1^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^t A_2^{-1} R_2)(b - AU^n) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Ce sont des méthodes de point fixe sur le système préconditionné.

Idée:

Utiliser une méthode de Krylov sur ce même système préconditionné.

Méthode de gradient conjugué

X^0 donné.
$r^0 = b - AX^0$
$d^0 = r^0$
TQ Non convergence

$$\left|\begin{array}{l} \gamma^k = \|r^k\|^2/(Ad^k, r^k) \\ X^{k+1} = X^k + \gamma^k d^k \\ r^{k+1} = r^k - \gamma^k Ad^k \\ \zeta^k = -(r^{k+1}, Ad^k)/(d^k, Ad^k) \\ d^{k+1} = r^{k+1} + \zeta^k d^k \end{array}\right.$$

Méthode de gradient conjugué préconditionné

X^0 donné.

$r^0 = b - AX^0$

$Mz^0 = r^0$

$d^0 = z^0$

TQ Non convergence

$$
\begin{array}{|l}
\gamma^k = (z^k, r^k)/(Ad^k, d^k) \\
X^{k+1} = X^k + \gamma^k d^k \\
r^{k+1} = r^k - \gamma^k A d^k \\
Mz^{k+1} = r^{k+1} \\
\zeta^k = -(z^{k+1}, Ad^k)/(d^k, Ad^k) \\
d^{k+1} = z^{k+1} + \zeta^k d^k
\end{array}
$$

AS comme préconditionneur

Préconditionneur:

$$M_{AS}^{-1} = R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2.$$

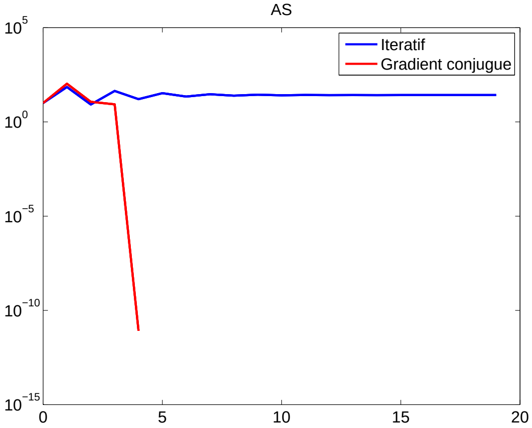
$\leadsto$ C'est un préconditionneur symétrique.

En Octave:

```
P=@(x) R1'*(A1\(R1*x))+R2'*(A2\(R2*x));

[u, f, res, it, resccg, eig]     ...
       = pcg (A,F,[],[],P,[]);
```

AS comme préconditionneur



RAS comme préconditionneur

Préconditionneur:

$$M_{RAS}^{-1} = \tilde{R}_1^t A_1^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^t A_2^{-1} R_2.$$

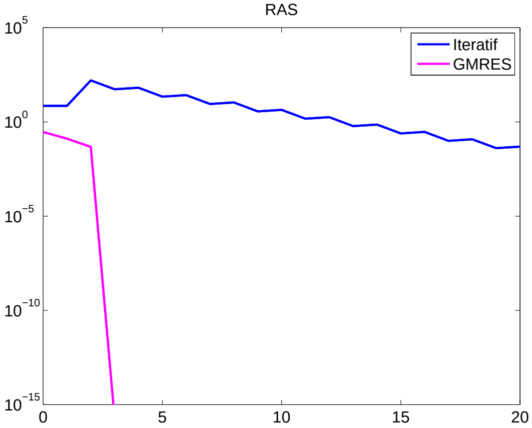
$\rightsquigarrow$ Ce n'est pas un préconditionneur symétrique.

En Octave:

```
P=@(x) Rt1'*(A1\(R1*x))+Rt2'*(A2\(R2*x));

[u, f, res, it, res] = gmres(A,F,[],[],[],P);
```

RAS comme préconditionneur



Outline

Préconditionnement par sous-structuration

Notations:

$$\mathcal{G}_1 : (z, f) \to u_1(b) \quad \text{où} \quad \begin{cases} -u_1'' + \alpha u_1 = f \text{ sur }]0, a[\\ u_1(0) = 0 \\ u_1(a) = z \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_2 : (z, f) \to u_2(a) \quad \text{où} \quad \begin{cases} -u_2'' + \alpha u_2 = f \text{ sur }]b, 1[\\ u_2(b) = z \\ u_2(1) = 0 \end{cases}$$

Algorithme de Schwarz parallèle:

$$\begin{cases} -(u_1^{n+1})'' + \alpha u_1^{n+1} = f \text{ sur }]0, a[\\ u_1^{n+1}(0) = 0 \\ u_1^{n+1}(a) = u_2^n(a) \end{cases} \quad \begin{cases} -(u_2^{n+1})'' + \alpha u_2^{n+1} = f \text{ sur }]b, 1[\\ u_2^{n+1}(b) = u_1^n(b) \\ u_2^{n+1}(1) = 0 \end{cases}$$

Préconditionnement par sous-structuration

Notations:

$$\mathcal{G}_1 : (z, f) \to u_1(b) \quad \text{où} \quad \begin{cases} -u_1'' + \alpha u_1 = f \text{ sur }]0, a[\\ u_1(0) = 0 \\ u_1(a) = z \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_2 : (z, f) \to u_2(a) \quad \text{où} \quad \begin{cases} -u_2'' + \alpha u_2 = f \text{ sur }]b, 1[\\ u_2(b) = z \\ u_2(1) = 0 \end{cases}$$

Algorithme de Schwarz parallèle:

$$\begin{cases} -(u_1^{n+1})'' + \alpha u_1^{n+1} = f \text{ sur }]0, a[\\ u_1^{n+1}(0) = 0 \\ u_1^{n+1}(a) = u_2^n(a) \end{cases} \quad \begin{cases} -(u_2^{n+1})'' + \alpha u_2^{n+1} = f \text{ sur }]b, 1[\\ u_2^{n+1}(b) = u_1^n(b) \\ u_2^{n+1}(1) = 0 \end{cases}$$

Préconditionnement par sous-structuration

Algorithme de Schwarz parallèle:

$$\begin{aligned}
u_1^{n+1}(b) &= \mathcal{G}_1(u_2^n(a), f) = \mathcal{G}_1(u_2^n(a), 0) + \mathcal{G}_1(0, f) \\
u_2^{n+1}(a) &= \mathcal{G}_2(u_1^n(b), f) = \mathcal{G}_2(u_1^n(b), 0) + \mathcal{G}_2(0, f).
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(a) \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_1(\cdot, 0) \\ \mathcal{G}_2(\cdot, 0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(a) \end{pmatrix}^{n} + \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(0, f) \\ \mathcal{G}_2(0, f) \end{pmatrix}$$

Ceci est un algorithme de Jacobi pour le système:

$$\begin{pmatrix} Id & -\mathcal{G}_1(\cdot, 0) \\ -\mathcal{G}_2(\cdot, 0) & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(0, f) \\ \mathcal{G}_2(0, f) \end{pmatrix}$$

Préconditionnement par sous-structuration

Algorithme de Schwarz parallèle:

$$\begin{aligned} u_1^{n+1}(b) &= \mathcal{G}_1(u_2^n(a), f) = \mathcal{G}_1(u_2^n(a), 0) + \mathcal{G}_1(0, f) \\ u_2^{n+1}(a) &= \mathcal{G}_2(u_1^n(b), f) = \mathcal{G}_2(u_1^n(b), 0) + \mathcal{G}_2(0, f). \end{aligned}$$

ou

$$\begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(a) \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_1(\cdot, 0) \\ \mathcal{G}_2(\cdot, 0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(a) \end{pmatrix}^{n} + \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(0, f) \\ \mathcal{G}_2(0, f) \end{pmatrix}$$

Ceci est un algorithme de Jacobi pour le système:

$$\begin{pmatrix} Id & -\mathcal{G}_1(\cdot, 0) \\ -\mathcal{G}_2(\cdot, 0) & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(0, f) \\ \mathcal{G}_2(0, f) \end{pmatrix}$$

Préconditionnement par sous-structuration

Algorithme de Schwarz parallèle:

$$
\begin{aligned}
u_1^{n+1}(b) &= \mathcal{G}_1(u_2^n(a), f) = \mathcal{G}_1(u_2^n(a), 0) + \mathcal{G}_1(0, f)\\
u_2^{n+1}(a) &= \mathcal{G}_2(u_1^n(b), f) = \mathcal{G}_2(u_1^n(b), 0) + \mathcal{G}_2(0, f).
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(a) \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_1(\cdot, 0) \\ \mathcal{G}_2(\cdot, 0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(a) \end{pmatrix}^{n} + \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(0, f) \\ \mathcal{G}_2(0, f) \end{pmatrix}
$$

Ceci est un algorithme de Jacobi pour le système:

$$
\begin{pmatrix} Id & -\mathcal{G}_1(\cdot, 0) \\ -\mathcal{G}_2(\cdot, 0) & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(0, f) \\ \mathcal{G}_2(0, f) \end{pmatrix}
$$

Préconditionnement par sous-structuration

Algorithme de Schwarz parallèle:

$$
\begin{aligned}
u_1^{n+1}(b) &= \mathcal{G}_1(u_2^n(a), f) = \mathcal{G}_1(u_2^n(a), 0) + \mathcal{G}_1(0, f) \\
u_2^{n+1}(a) &= \mathcal{G}_2(u_1^n(b), f) = \mathcal{G}_2(u_1^n(b), 0) + \mathcal{G}_2(0, f).
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(a) \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_1(\cdot, 0) \\ \mathcal{G}_2(\cdot, 0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(a) \end{pmatrix}^{n} + \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(0, f) \\ \mathcal{G}_2(0, f) \end{pmatrix}
$$

Ceci est un algorithme de Jacobi pour le système:

$$
\begin{pmatrix} Id & -\mathcal{G}_1(\cdot, 0) \\ -\mathcal{G}_2(\cdot, 0) & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(0, f) \\ \mathcal{G}_2(0, f) \end{pmatrix}
$$

Idée: Résoudre ce système par une méthode de Krylov.

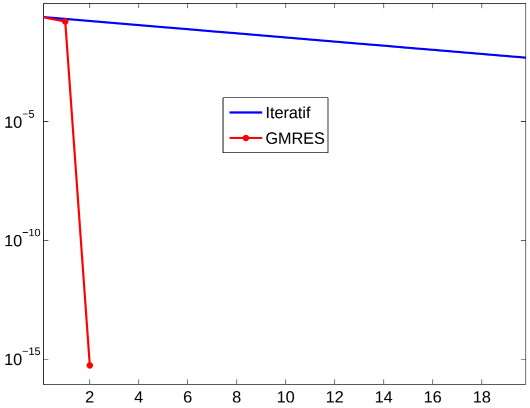
Programme Octave

```
T= @(g) [g(1)-R1*lap1d(zz,alpha,x1,0,g(2));
         g(2)-R2*lap1d(zz,alpha,x2,g(1),0)];

bb=zeros(2,1);
bb(1)=R1*lap1d(f,alpha,x1,g0,0);
bb(2)=R2*lap1d(f,alpha,x2,0,g1);


[G, fl, res, it, res] = gmres(T,bb);
```

Résultats Numériques 1D



Outline

Outline

Introduction

Méthodes de Schwarz
- Schwarz du point de vue continu
- Schwarz du point de vue discret

Méthode de Schwarz comme préconditionneur
- Rappels sur le préconditionnement
- Préconditionnement par volume
- Precond. par sous-structuration

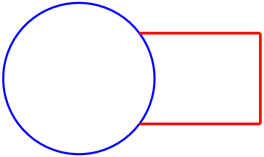
Vers les méthodes optimisées
- Limitiations de la méthode de Schwarz classique
- Alternatives

Conclusion

Limitations de la méthode de Schwarz classique

P.L. Lions 1990:

"However, the Schwarz method requires that the subdomains overlap, and this may be a severe restriction - without speaking of the obvious or intuitive waste of efforts in the region shared by the subdomains."



$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ (\partial_{n_1} + p_1)u_1^{n+1} = (\partial_{n_1} + p_1)u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ (\partial_{n_2} + p_2)u_2^{n+1} = (\partial_{n_2} + p_2)u_1^n \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Limitations de la méthode de Schwarz alternée

La méthode de Schwarz alternée ne converge pas sur l'équation de Helmholtz:

$$\triangle u + \omega^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Schwarz alterné:

$$\begin{cases} (\triangle + \omega^2) u_1^{n+1} = f \text{ sur }]-\infty, d[\times\mathbb{R}, \\ u_1^{n+1}(d,\cdot) = u_2^n(d,\cdot) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\triangle + \omega^2) u_2^{n+1} = f \text{ sur }]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \\ u_2^{n+1}(0,\cdot) = u_1^n(0,\cdot) \end{cases}$$

Limitations de la méthode de Schwarz alternée

La méthode de Schwarz alternée ne converge pas sur l'équation de Helmholtz:

$$\triangle u + \omega^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Schwarz alterné: $e_i^n = u - u_i^n$

$$\begin{cases} (\triangle + \omega^2) e_1^{n+1} = 0 \text{ sur }]-\infty, d[\times\mathbb{R}, \\ e_1^{n+1}(d,\cdot) = e_2^n(d,\cdot) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\triangle + \omega^2) e_2^{n+1} = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \\ e_2^{n+1}(0,\cdot) = e_1^n(0,\cdot) \end{cases}$$

Taux de convergence:

$$\rho(k) = e^{-2d\sqrt{k^2-\omega^2}}.$$

Outline

Méthode de Schur

Résoudre $-\triangle u = f$ sur Ω est équivalent à résoudre:

$$-\triangle u_1 = f \text{ dans } \Omega_1 \quad -\triangle u_2 = f \text{ dans } \Omega_2$$
$$u_1 = u_2 \text{ sur } \Gamma$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \text{ sur } \Gamma$$

Méthode de Schur

Résoudre $-\triangle u = f$ sur Ω est équivalent à résoudre:

$$-\triangle u_1 = f \text{ dans } \Omega_1 \quad -\triangle u_2 = f \text{ dans } \Omega_2$$
$$u_1 = u_2 \text{ sur } \Gamma$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \text{ sur } \Gamma$$

Idée:

$$\begin{cases} -\triangle u_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1, \\ u_1^{n+1} = \lambda \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\triangle u_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2, \\ u_2^{n+1} = \lambda \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Chercher λ tel que $\dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} - \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0.$

Méthode Dirichlet-Neumann

Algorithme:

$$\begin{cases} -(u_1^{n+1})'' = f \text{ dans }]a, \gamma[\\ u_1^{n+1}(a) = 0 \\ u_1^{n+1}(\gamma) = u_2^n(\gamma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(u_2^{n+1})'' = f \text{ dans }]\gamma, b[\\ u_2^{n+1}(b) = 0 \\ (u_2^{n+1})'(\gamma) = (u_1^n)'(\gamma) \end{cases}$$

Condition de convergence pour $f = 0$:

$$\gamma > (a+b)/2.$$

Méthode Dirichlet-Neumann

Algorithme relaxé:

$$\begin{cases} -(u_1^{n+1})'' = f \text{ dans }]a,\gamma[\\ u_1(a) = 0 \\ u_1^{n+1}(\gamma) = \lambda^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(u_2^{n+1})'' = f \text{ dans }]\gamma,b[\\ u_2(b) = 0 \\ (u_2^{n+1})'(\gamma) = (u_1^n)'(\gamma) \end{cases}$$

$$\lambda^{n+1} := \theta u_2^{n+1}(\gamma) + (1-\theta)\lambda^n.$$

C'est un algorithme de Richardson préconditionné pour le problème de Schur.

Méthode de Schwarz optimisée

Algorithme avec conditions de Robin:

$$\begin{cases} (-\triangle+\alpha)u_1^{n+1} = f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ (\partial_n+p)u_1^{n+1} = (\partial_n+p)u_2^n \text{ sur } \{0\}\times\mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\triangle+\alpha)u_2^{n+1} = f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ (\partial_n-p)u_2^{n+1} = (\partial_n-p)u_1^n \text{ sur } \{0\}\times\mathbb{R}. \end{cases}$$

Méthode de Schwarz optimisée

Algorithme avec conditions de Robin:

$$\begin{cases} (-\triangle+\alpha)u_1^{n+1} = f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ (\partial_n + p)u_1^{n+1} = (\partial_n + p)u_2^n \text{ sur } \{0\}\times\mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\triangle+\alpha)u_2^{n+1} = f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ (\partial_n - p)u_2^{n+1} = (\partial_n - p)u_1^n \text{ sur } \{0\}\times\mathbb{R}. \end{cases}$$

Taux de convergence:

$$\hat{e}_1^n(x,k) = A^n e^{\sqrt{\alpha+k^2}x},\ \hat{e}_2^n(x,k) = B^n e^{-\sqrt{\alpha+k^2}x}$$

$$\rho(k) = \left(\frac{p-\sqrt{\alpha+k^2}}{p+\sqrt{\alpha+k^2}}\right)^2$$

Outline

Conclusion

- Méthode de Schwarz
  - Nécessité d'un recouvrement pour Schwarz classique
  - Cas N sous-domaines: nécessité d'un préconditionneur grille grossière
  - Lien discret/continu
- Méthode de Schwarz comme préconditionneur