TP Décomposition de domaines — 4 décembre 2014
Journées Numérique Nice

---

**Exercice 0** : télécharger les données sur la page dédiée au cours.

`http://www.math.univ-toulouse.fr/~cbesse/site/enseignement/`

**Exercice 1 : Méthode de Schwarz alternée en 2D**.

On souhaite résoudre le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u_1^k = f, & x \in \Omega_1, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_1^k + p u_1^k = \partial_{\mathbf{n}} u_2^{k-1} + p u_2^{k-1}, & x \in \Gamma, \\ u_1^k = 0, & x \in \partial\Omega_1 \backslash \Gamma, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} -\Delta u_2^k = f, & x \in \Omega_2, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_2^k - p u_2^k = \partial_{\mathbf{n}} u_1^{k-1} - p u_1^{k-1}, & x \in \Gamma, \\ u_2^k = 0, & x \in \partial\Omega_2 \backslash \Gamma. \end{array}\right. \tag{1}$$

On note $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Gamma$ l'interface commune à $\Omega_1$ et $\Omega_2$. La normale $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante à $\Omega_1$ sur $\Gamma$.

L'objet de cet exercice est de résoudre (1) par une méthode d'éléments finis. À titre d'exemple, le problème de Poisson sur un domaine complet $\Omega$ est donné par la fonction `poisson.m` fournie dans les données téléchargées.

1. Générer le maillage d'un carré ou d'un cercle avec gmsh. On pourra utiliser les géométries fournies dans les données téléchargées.
2. Mettre en œuvre l'algorithme.
3. Tester plusieurs valeurs de $p$.

**Exercice 2 : Méthode SWR avec conditions de transmission de Dirichlet**.

L'objet de cet exercice est de résoudre l'équation d'advection-diffusion

$$\partial_t u + \mathscr{L} u = \partial_t u + a\partial_x u - \nu \partial_x^2 u = f, \quad x \in (a_0, b_0), \tag{2}$$

avec $a > 0$, $\nu > 0$ et $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

Mettre en œuvre la méthode SWR suivante

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t u_1^k + \mathscr{L} u_1^k = f, & x \in (a_1, b_1),\ t \in (0,T), \\ u_1^k = g_l, & x = a_1,\ t \in (0,T), \\ u_1^k = u_2^{k-1}, & x = b_1,\ t \in (0,T), \\ u_1^k = u_I, & x \in (a_1, b_1),\ t = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} \partial_t u_2^k + \mathscr{L} u_2^k = f, & x \in (a_2, b_2),\ t \in (0,T), \\ u_2^k = u_1^{k-1}, & x = a_2,\ t \in (0,T), \\ \partial_x u_2^k = g_r, & x = b_2,\ t \in (0,T), \\ u_2^k = u_I, & x \in (a_2, b_2),\ t = 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

avec un schéma de Crank-Nicolson en temps et une méthode de différences finies en espace. Ici, $a_1 = a_0$ et $b_2 = b_0$ de sorte que $\Omega = (a_0, b_0) = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$. On supposera qu'un overlap est présent, c'est à dire que $b_1 = a_2 + \ell$ afin que la méthode converge.

On pourra consulter la fonction `advection_diffusion.m` afin d'avoir une base de départ.

**Exercice 3 : Méthode SWR avec conditions de transmission optimisée d'ordre 0**.

On souhaite toujours résoudre l'équation (2). Cette fois, on utilise les conditions de transmission d'ordre 0 vues en cours.

$$\begin{cases} \partial_t u_1^k + \mathscr{L} u_1^k = f, & x \in (a_1, b_1),\, t \in (0,T), \\ u_1^k = g_l, & x = a_1,\, t \in (0,T), \\ \partial_x u_1^k - \lambda_1 u_1^k = \partial_x u_2^{k-1} - \lambda_1 u_2^{k-1}, & x = b_1,\, t \in (0,T), \\ u_1^k = u_I, & x \in (a_1, b_1),\, t = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t u_2^k + \mathscr{L} u_2^k = f, & x \in (a_2, b_2),\, t \in (0,T), \\ \partial_x u_2^k - \lambda_2 u_2^k = \partial_x u_1^{k-1} - \lambda_2 u_1^{k-1}, & x = a_2,\, t \in (0,T), \\ \partial_x u_2^k = g_r, & x = b_2,\, t \in (0,T), \\ u_2^k = u_I, & x \in (a_2, b_2),\, t = 0, \end{cases} \tag{4}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{a-p}{2\nu}, \quad \lambda_2 = \frac{a+p}{2\nu}.$$

Ici, $p > 0$ et on supposera encore pour simplifier que l'overlap $\ell > 0$.

1. Mettre en œuvre la méthode avec le même type d'approximation qu'à l'exercice précédent.
2. Tracer la courbe permettant l'optimisation de $p$.
3. Faire l'étude numérique de la convergence en fonction de $p$.