TD Décomposition de domaine — 4 décembre 2014.
Journées Numérique. Nice.

Exercice 1: Schwarz alterné en 1D

On va mettre en oeuvre ici la méthode de Schwarz alternée pour l'équation 1D:

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = f \quad \text{sur } (0,1), \\ u(0) = g_0, u(1) = g_1. \end{cases} \tag{1}$$

a) Ecrire une fonction *lap1d* qui prend en argument d'entrée f (une fonction), α, X une discrétisation uniforme de l'intervalle $(0,1)$, g_0 et g_1. Cette fonction renvoie le vecteur U (de même dimension que X) qui est l'approximation de la solution de (1) par différences finies d'ordre 2.

On utilisera la commande Octave `spdiags` pour construire la matrice du Laplacien en prenant en compte son caractère creux.

b) Prendre $f(x) = (9 + \alpha)\sin(3x)$, $\alpha = 1$, $g_0 = 0$ et $g_1 = \sin(3)$ et tester le programme précédent.

c) Mettre en oeuvre l'algorithme de Schwarz alterné:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^k = f \text{ sur }]0, x_1[\\ u_1^k(0) = g_0 \\ u_1^k(x_1) = u_2^k(x_1) \end{cases} \begin{cases} \mathcal{L}u_2^k = f \text{ sur }]x_2, 1[\\ u_2^k(x_2) = u_1^k(x_2) \\ u_2^k(1) = g_1 \end{cases}$$

où $x_1 = X(m_1)$ et $x_2 = X(m_2)$ avec X une discrétisation uniforme de $[0,1]$ et $m_2 < m_1$.

- On pourra dans un premier temps effectuer 20 itérations.
- On pourra prendre $m_1 = 60$ et $m_2 = 50$ pour une discrétisation de $(0,1)$ de 102 points.
- Tracer les différents itérés et observer la convergence de la suite vers la solution globale.

d) Trouver un critère d'arrêt pour l'algorithme.

e) Tracer la valeur de ce critère d'arrêt en fonction des itérations.

f) Reprendre la question précédente pour plusieurs tailles de recouvrement.

g) Mettre en oeuvre la version parallèle de cet algorithme.

h) Mettre en oeuvre la méthode de décomposition de domaine avec $N = 4$ sous-domaines. On testera sur $f = 0$, $g_0 = 0$ et $g_1 = 1$.

Exercice 2: Schwarz alterné en 2D

On s'intéresse ici au problème 2D:

$$\begin{cases} -\triangle u + \alpha u = f \text{ dans } \Omega :=]0,1[\times]0,1[, \\ u(x,0) = g_1(x),\ x \in [0,1], \\ u(1,y) = g_2(y),\ y \in [0,1], \\ u(x,1) = g_3(x),\ x \in [0,1], \\ u(0,y) = g_4(y),\ y \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

On travaille ici sur un maillage uniforme dans les deux directions: tous les domaines sont discrétisés par des mailles de taille $h \times h$.

a) Construire une discrétisation du carré unité grâce à l'instruction `meshgrid`.

b) Ecrire une fonction `mat_lap2d` qui calcule la matrice obtenue par discrétisation de (2) par différences finies. Elle prend en arguments d'entrée α, n, m avec $n+2$ et $m+2$ les dimensions du maillage du domaine de calcul et h le pas de discrétisation. On utilisera la fonction `kron`.

c) Ecrire une fonction `lap2d` qui prend en arguments d'entrée A (la matrice du schéma), f (une fonction), les données de Dirichlet aux quatre bords (des vecteurs), X, Y une discrétisation de $[0,1] \times [0,1]$ et h le pas de discrétisation. Cette fonction renvoie le vecteur U (de même dimension que X et Y) qui est l'approximation de la solution de (2) par différences finies d'ordre 2.

d) Tester les fonctions précédentes sur les données:
- $\alpha = 0$.
- $f(x,y) = 2\sin(x)\sin(y)$.
- $g_1 \equiv 0$, $g_4 \equiv 0$, $g_2(y) = \sin(1)\sin(y)$ et $g_3(x) = \sin(1)\sin(x)$.

e) Extraire du maillage global deux maillages se recouvrant.

f) Mettre en oeuvre la méthode de Schwarz alterné avec les données:
- $\alpha = 0$.
- $f(x,y) = 2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$.
- $g_1 \equiv g_2 \equiv g_3 \equiv g_4 \equiv 0$.

g) Modifier le programme précédent pour améliorer ses performances: calculer la factorisation LU une unique fois avant la boucle de Schwarz.

Exercice 3: Méthodes de DDM vues comme un préconditionneur

On considère ici le problème 1D.

a) Programmer les méthodes MS, AS et RAS.

b) Accélerer les algorithmes précédents grâce à une méthode de Krylov.

Exercice 4: Préconditionnement par sous-structuration

On étudie ici la méthode de sous-structuration pour le problème 1D.

a) Résoudre le système linéaire vérifié par les inconnues d'interface par une méthode de type point fixe.

b) Résoudre à présent le système par GMRES.

c) Comparer la vitesse de convergence des deux méthodes.