

Feuille 1  
Corps des nombres complexes

*Corrigée par les étudiants*

**Exercice 1** – Mettre sous la forme  $x + iy$  avec  $x, y$  réels les nombres complexes :

$$(3 - 2i)^2 ; \quad (3 - 2i)^3 ; \quad \frac{1}{3 - 2i} ; \quad \frac{1}{(3 - 2i)(1 - i)} ; \quad \frac{2 - i}{(3 - i)(1 - 2i)} .$$

**Exercice 2** – Déterminer sous la forme  $x + iy$  avec  $x, y$  réels les nombres complexes  $z$  solutions des équations :

- a)  $4iz + 4 - 3i = 0$
- b)  $(10 - 2i)z + 5 + 7i = 0$
- c)  $(1 - i)\bar{z} - 4 + 5i = 0$

**Exercice 3** – Déterminer les couples de complexes solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} (1+i)z_1 - 2z_2 = 3-i \\ iz_1 + (3+2i)z_2 = 1+2i \end{cases}$$

En déduire les couples de complexes solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} (1-i)z_1 - 2z_2 = 3+i \\ -iz_1 + (3-2i)z_2 = 1-2i \end{cases}$$

**Exercice 4** – (Équations du second degré à coefficients réels) Trouver les nombres réels ou complexes solutions des équations suivantes :

- 1a)  $x^2 = \frac{32}{49}$  ; 1b)  $x^2 = 0$  ; 1c)  $x^2 = -17$
- 2a)  $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = 0$  ; 2b)  $(\sqrt{3}x - 2)^2 = 0$  ; 2c)  $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} = 0$
- 3a)  $6x^2 - 5x + 1 = 0$  ; 3b)  $9x^2 + 12\sqrt{2}x + 8 = 0$  ; 3c)  $x^2 - x + \frac{13}{36} = 0$

**Exercice 5** – (Équations du second degré à coefficients complexes) Déterminer sous la forme  $x + iy$  avec  $x, y$  réels les deux nombres complexes solutions de l'équation  $z^2 = c$  dans les cas :

$$c = 3 + 8i ; \quad c = -11 + 4i ; \quad c = 1 - i .$$

(Une méthode consiste à remarquer que  $|z|^2 = x^2 + y^2 = |c|$ ,  $x^2 - y^2 = \operatorname{Re} c$ , à déterminer les couples  $(x^2, y^2)$ , puis les couples  $(x, y)$  en tenant compte du signe de  $2xy = \operatorname{Im} c$ ).

**Exercice 6** – (Équations du second degré à coefficients complexes) Déterminer sous la forme  $x + iy$  avec  $x, y$  réels les nombres complexes  $z$  solutions des équations :

- a)  $z^2 + (2+i)z - i = 0$   
 b)  $z^2 - (1+2i)z + 2 = 0$   
 c)  $4z^2 + (2-6i)z - 8 - 6i = 0$

Déduire de a) les solutions complexes de l'équation :

$$z^2 + (2-i)z + i = 0$$

**Exercice 7** – Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$-1 \quad ; \quad 1-i \quad ; \quad -2\sqrt{3}+2i \quad ; \quad (1+i)(\sqrt{3}-i) \quad ; \quad \frac{1+i}{3-i} .$$

En déduire par exemple le module et l'argument des complexes  $z$  tels que

$$z^5 = 1+i \quad ; \quad z^3 = (1+i)(\sqrt{3}-i) .$$

**Exercice 8** – (similitude directe) Déterminer le points fixe et la nature des similitudes directes :

$$\begin{aligned}\phi_1 : \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \phi_1(z) = 2iz + 1 - 3i \\ \phi_2 : \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \phi_2(z) = (1-i)z + 1 - 3i \\ \phi_3 : \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \phi_3(z) = (1+i\sqrt{3})z + 1 - 3i \\ \phi_4 : \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \phi_4(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)z + 2 + i\end{aligned}$$

**Exercice 9** – (similitude directe) Considérons les similitudes directes :

$$\begin{aligned}\phi : \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \phi(z) = (1+i)z + 2 + 3i \\ \psi : \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \psi(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)z + 1 + i\end{aligned}$$

- 1) Déterminer le point fixe et la nature de  $\phi$  et de  $\psi$ .
- 2) Préciser l'application composée  $\phi \circ \psi$ . Constater qu'il s'agit d'une similitude directe. Déterminer son point fixe et sa nature.
- 3) Même question avec  $\psi \circ \phi$ .
- 4) Nous savons que  $\phi$  et  $\psi$  sont bijectives, préciser  $\phi^{-1}$  et  $\psi^{-1}$ .
- 5) Constater que  $\phi^{-1}$  et  $\psi^{-1}$  sont des similitudes directes. Préciser avec et sans calculs leurs points fixes et leurs natures.

**Exercice 10** – Donner une expression de  $\cos 3\theta$  et  $\sin 3\theta$  à l'aide de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ . Pour cela, on utilisera que pour tout entier relatif  $n$  et tout réel  $\theta$  :  $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ . Même question avec  $\cos 5\theta$  et  $\sin 5\theta$

**Exercice 11** – Soit  $\theta$  un nombre réel et  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ . Montrer que pour tout entier  $n$  :

$$2\cos n\theta = z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n ; \quad 2i\sin n\theta = z^n - \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

En développant  $\left(z + \frac{1}{z}\right)^5$  et  $\left(z - \frac{1}{z}\right)^5$ , donner une expression de  $\cos^5 \theta$  et  $\sin^5 \theta$  à l'aide de  $\cos 5\theta, \sin 5\theta, \cos 3\theta, \sin 3\theta, \cos \theta$  et  $\sin \theta$

**Exercice 12** – 1) Montrer que pour tout réel  $\theta$  :

$$\cos \theta = \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) ; \quad \sin \theta = 2\cos \left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2) Déduire à l'aide  $\frac{\theta}{2}$  le module et l'argument du nombre complexe :

$$e^{i\theta} - 1 = \cos \theta + i \sin \theta - 1 .$$

3) Montrer que pour tout nombre complexe  $z$  distinct de 1 :

$$\sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

4) Soit  $\theta$  un nombre réel distinct de  $0 \bmod 2\pi$ . Montrer que pour tout entier  $n$  :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = 1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{in\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

5) En déduire que pour tout entier  $n$  et  $\theta$  réel distinct de  $0 \bmod 2\pi$  :

$$\left| \sum_{k=0}^n \cos k\theta \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=0}^n \sin k\theta \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$$

**Exercice 13** – 1) Soit  $z$  un complexe différent de  $-i$ . Montrer que le nombre complexe  $\frac{z-i}{z+i}$  est différent de 1.

On note alors  $f : \mathbf{C} - \{-i\} \rightarrow \mathbf{C} - \{1\}$  l'application définie par  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ .

2) Montrer que  $f$  est bijective. Déterminer  $f^{-1}$ .

3) Montrer que  $f$  admet deux points fixes  $z_1$  et  $z_2$  que l'on déterminera.

4) Montrer qu'il existe un complexe  $a$  que l'on précisera tel que pour tout  $z$  distinct de  $-i$  et  $z_2$  :

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = a \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

5) Déterminer deux complexes  $c$  et  $d$  tels que pour tout complexe  $z$  distinct de  $-i$  :

$$f(z) = c + \frac{d}{z + i}$$

**Exercice 14** – (similitudes directes) On considère  $\text{Sim}^+$  l'ensemble des similitudes directes. Pour  $a$  un nombre complexe non nul et  $b$  un nombre complexe, on note  $\phi_{a,b}$  la similitude directe :

$$\phi_{a,b} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \phi_{a,b}(z) = az + b$$

- 1) Soit  $a, a'$  des complexes non nuls et  $b, b'$  des complexes. Préciser l'application composée  $\phi_{a,b} \circ \phi_{a',b'}$ .
- 2) Montrer que  $\phi_{a,b}$  est bijective et déterminer  $\phi_{a,b}^{-1}$ . Montrer que  $\text{Id}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  définie par  $\text{Id}_{\mathbf{C}}(z) = z$  est une similitude directe.
- 3) Montrer que  $\text{Sim}^+$  pour la loi de composition des applications est un groupe d'élément neutre  $\text{Id}_{\mathbf{C}}$ .
- 4) Déterminer en fonction de  $a$  et  $b$  les points fixes de  $\phi_{a,b}$ .

Soit  $z_0, z_1, z_2$  les affixes de 3 points  $M_0, M_1, M_2$ . Notons  $M'_0, M'_1, M'_2$  les points dont les affixes sont  $\phi_{a,b}(z_0), \phi_{a,b}(z_1), \phi_{a,b}(z_2)$ .

- 5) Montrer que

$$\|\overrightarrow{M'_0 M'_1}\| = |a| \|\overrightarrow{M_0 M_1}\|$$

En déduire que si  $M$  d'affixe  $z$  décrit un cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  et de rayon  $R$ , les points d'affixes  $\phi_{a,b}(z)$  décrivent un cercle que l'on précisera.

- 6) Montrer l'égalité des angles de vecteurs :

$$(\widehat{\overrightarrow{M'_0 M'_1}, \overrightarrow{M'_0 M'_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_0 M_1}, \overrightarrow{M_0 M_2}})$$

En déduire que si  $M$  d'affixe  $z$  décrit une droite, les points d'affixes  $\phi_{a,b}(z)$  décrivent une droite.

On considère l'ensemble  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$  formé des couples  $(a, b)$  tels que  $a$  est un nombre complexe non nul et  $b$  un nombre complexe. On considère la loi interne  $\star$  sur  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$  définie par :

$$(a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + b).$$

- 7) Montrer que muni de cette loi  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$  est un groupe non commutatif dont on précisera l'élément neutre.
- 8) Montrer que l'application :

$$\mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \rightarrow \text{Sim}^+ \quad : \quad (a, b) \mapsto \phi_{a,b}$$

est un morphisme de groupe.

- 9) Montrer que ce morphisme de groupes est bijectif et déterminer son inverse.

21 Janvier 2008

Algèbre

L1MP

Feuille 1 - Corps des nombres complexes

Exercice 1: écrire sous la forme  $x+iy$  avec  $x, y$  réels les nombres complexes :

$$\star (3-2i)^2 = 9-12i+4i^2 = 9-12i-4 = \underline{5-12i}$$

$$\star (3-2i)^3 = (5-12i)(3-2i) = 15-10i-36i+24i^2$$

N.B. on peut aussi utiliser  
la formule: ( $a=3, b=-2i$ )  
 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= 15-10i-36i-24 = \underline{-9-46i}$$

$$\star \frac{1}{3-2i} = \frac{(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

$$\star \frac{1}{(3-2i)(1-i)} = \frac{1}{3-3i-2i+2i^2} = \frac{1}{3-5i} = \frac{1}{1-5i}$$

$$= \frac{1+5i}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{1+5i}{26} = \frac{1}{26} + \frac{5}{26}i$$

$$\star \frac{2-i}{(3-i)(1-2i)} = \frac{2-i}{3-6i-i+2i^2} = \frac{2-i}{1-7i} = \frac{(2-i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)}$$

$$= \frac{2+14i-i-7i^2}{50} = \frac{9+13i}{50} = \frac{9}{50} + \frac{13}{50}i$$

### Exercice 2

$$a) 4iz + 4 - 3i = 0 \Leftrightarrow 4iz = -4 + 3i \Leftrightarrow z = \frac{-4 + 3i}{4i} = \frac{-4 + 3i}{4i} \times \frac{i}{i} = \frac{-4i + 3}{4} = \frac{-3 - 4i}{4}$$
$$z = \frac{3}{4} + i$$

$$b) (10 - 2i)z + 5 + 7i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-5 - 7i}{10 - 2i} = \frac{-5 - 7i}{10 - 2i} \times \frac{10 + 2i}{10 + 2i} = \frac{-50 - 70i - bi + 14}{104}$$

$$z = \frac{-36 - 80i}{104} = \frac{-9}{26} - \frac{10}{13}i$$

$$c) (1-i)\bar{z} - 4 + 5i = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{4 - 5i}{1-i} = \frac{4 - 5i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{9 - 1i}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{done } z = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}i$$

Correction exercice 3

$$\begin{cases} (1+i)z_1 - 2z_2 = 3-i & (1) \\ i z_1 + (3+2i)z_2 = 1+2i & (2) \end{cases}$$

$$(1) \times i \quad i^2 [ (1+i)z_1 - 2z_2 ] = 3i + 1$$

$$(2) \times (1+i) \quad (1+i) [ iz_1 + (3+2i)z_2 ] = (1+i)(1+2i)$$

$$\begin{cases} i^2 z_1 - 3z_1 - 2iz_2 = 3i + 1 & (1)' \\ iz_1 + z_2 + 5iz_2 - z_1 = 3i - 1 & (2)' \end{cases}$$

(méthode par élimination :)

$$(1)' - (2)': -7iz_2 - z_2 = 2$$

$$\text{d'où } z_2 = \frac{-2}{1+7i} = \frac{-2(1-7i)}{50} = \boxed{-\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i}$$

1<sup>e</sup> méthode pour calculer  $z_1$ :

On remplace  $z_2$  dans l'expression (1): (méthode par substitution)

$$(1+i)z_1 - 2\left(-\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i\right) = 3-i$$

$$z_1(i+1) = \frac{73}{85} - \frac{11}{85}i$$

$$\text{d'où } z_1 = \left(\frac{73}{85} - \frac{11}{85}i\right) \times \frac{1}{1+i} = \left(\frac{73}{85} - \frac{11}{85}i\right) \times \frac{1-i}{2}$$

2<sup>e</sup> méthode pour calculer  $z_1$ :

semblable à celle pour calculer  $z_2$ :

$(2+2i) \times (1) + 2 \times (2)$  donne

$$(1+7i)z_1 = 13+7i \quad \text{d'où } z_1 = \dots$$

$$73(1-i) - 11i(1-i)$$

$$= \frac{-84i+62}{50} = \boxed{\frac{42}{85}i + \frac{31}{85}}$$

donc le couple solution de ce système est:  $S = \left\{ \left( \frac{42}{85}i + \frac{31}{85}, -\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i \right) \right\}$   
 $(z_1, z_2)$

$$\begin{cases} (1-i)z_1 - 2z_2 = 3+i \\ -iz_1 + (3-2i)z_2 = 1-2i \end{cases}$$

Conseil: remplacer  $z_1$  et  $z_2$  par ces valeurs dans le système pour vérifier qu'ils sont bien solution

Ce système a pour solution le conjugué de la solution du système précédent donc:  $S' = \left\{ \left( \frac{42}{85} + \frac{31}{85}i, -\frac{1}{25} - \frac{7}{25}i \right) \right\}$

Correction exercice 4

1) a.  $x^2 = \frac{32}{49} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$  ou  $x = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$

b.  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c.  $x^2 = -17 = 17i^2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{17}i$  ou  $x = \sqrt{17}i$

2) a.  $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow [(x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}][(x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}] = 0$

$\Leftrightarrow (x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}) = 0$

d'où  $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  ou  $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

ou bien directement:  
 $x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  d'où  $x = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

b.  $(\sqrt{3}x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 2 = 0$  d'où  $x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c.  $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = -\frac{5}{4} = \frac{5}{4}i^2$

d'où  $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}i$  ou  $x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}i$

$x = \frac{\sqrt{5}}{2}i + \frac{1}{2}$  ou  $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}i + \frac{1}{2}$

3) a.  $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 84 = 1 > 0$  (deux solutions)

(remplacer tout de suite  $\sqrt{2}$  par 1 !)

$x = \frac{5 - \sqrt{17}}{12} = \frac{1}{3}$  ou  $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{12} = \frac{1}{2}$

b.  $9x^2 + 18\sqrt{8}x + 8 = 0$

$\Delta = 238 - 288 = 0$  (une seule solution)

$x = -\frac{18\sqrt{8}}{18} = -\frac{8\sqrt{8}}{3}$

c.  $x^2 - x + \frac{13}{36} = 0$

$\Delta = 1 - \frac{13}{9} = -\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}i\right)^2$

$x = \frac{1 - \frac{2}{3}i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$

ou  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$

Correction exercice  
m° 5

$$\star c = 3+8i$$

$$\text{Soit } z^2 = c = 3+8i$$

$$|c| = \sqrt{73}$$

D'où on obtient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{73} \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\text{Donc } 2x^2 = \sqrt{73} + 3$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{73} + 3}{2}$$

$$\text{soit } x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{73} + 3}{2}}$$

$$\text{et } y^2 = \frac{\sqrt{73} - 3}{2}$$

$$\text{soit } y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{73} - 3}{2}}$$

Or on a  $2xy = 4$  donc nous en déduisons que  $x$  et  $y$  sont du même signe

donc les solutions sont :

$$\boxed{z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{73} + 3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{73} - 3}{2}}} ;$$

$$\boxed{z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{73} + 3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{73} - 3}{2}}} ;$$

$$\star c = -11+6i$$

$$|c| = |z|^2 = \sqrt{11^2 + 6^2} = \sqrt{137}$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -11 + 6i$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{137} \\ x^2 - y^2 = -11 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$\text{On en déduit donc que } \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{137} - 11 \\ 2y^2 = \sqrt{137} + 11 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{137} - 11}{2}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{137} + 11}{2}}$$

Or  $2xy = 6$  donc  $x$  et  $y$  sont du même signe, soit :

$$\boxed{z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{137} - 11}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{137} + 11}{2}}} ; \quad \text{et } \boxed{z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{137} - 11}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{137} + 11}{2}}} ;$$

$$\star c = 1-i$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 1 - i$$

$$|c| = \sqrt{2} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases}$$

Plus en déduisons que

$$x = \pm \sqrt{\frac{1+i\sqrt{2}}{2}} \text{ et } y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$\boxed{z_1 = \sqrt{\frac{1+i\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}} ;$$

$$\boxed{z_2 = -\sqrt{\frac{1+i\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}} ;$$

Or  $2xy = -1$  donc  $x$  et  $y$  sont de signes différents, On a :

BEN AYED

28/01/08

Marouan

Exercice 6:

1°)  $\beta^2 + (2+i)\beta - i = 0$

$$\Delta = (2+i)^2 - 4(-i) = 3+8i$$

d'équation  $\delta^2 = 3+8i$

Or d'après l'exercice 5, pour  $c=3+8i$ , on a 2 solutions  $\delta_1$  et  $\delta_2$

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{173}+3}{2} + i\sqrt{\frac{\sqrt{173}-3}{2}} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{173}+3)}}{2} + i\frac{\sqrt{2(\sqrt{173}-3)}}{2}$$

$$\delta_2 = -\frac{\sqrt{173}+3}{2} - i\sqrt{\frac{\sqrt{173}-3}{2}} = -\frac{\sqrt{2(\sqrt{173}+3)}}{2} - i\frac{\sqrt{2(\sqrt{173}-3)}}{2}$$

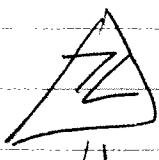
Donc on a 2 solutions  $\beta_1$  et  $\beta_2$  tel que :

$$\beta_1 = \frac{-b + \cancel{s}}{2a} = \frac{-(2+i) + \sqrt{2(\sqrt{173}+3)}}{2} + i\frac{\sqrt{2(\sqrt{173}-3)}}{4}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\sqrt{2(\sqrt{173}+3)} - 4}{4} + i\frac{(\sqrt{2(\sqrt{173}-3)} - 2)}{4}$$

$$\beta_2 = \frac{-b - \cancel{s}}{2a} = \frac{-(2+i) - \sqrt{2(\sqrt{173}+3)}}{2} - i\frac{(\sqrt{2(\sqrt{173}-3)} + 2)}{4}$$

$$\beta_2 = \frac{-(\sqrt{2(\sqrt{173}+3)} + 4)}{4} - i\frac{(\sqrt{2(\sqrt{173}-3)} + 2)}{4}$$



de signe  $\sqrt{\Delta}$  est réservé seulement

aux  $\Delta$  réels positifs ou nul, on

ne peut pas l'écrire lorsque  $\Delta$  est un complexe (qui n'est pas un réel positif !)

$$b) \underline{z^2 - (1+2i)z + 2 = 0}$$

On a :

$$\Delta = (1+2i)^2 - (4 \times 2) = -11 + 4i$$

Or d'après l'exercice 5, l'équation  $s^2 = \Delta$  a 2 solutions  $s$  dr. -s.

$$(-s_1 = -\frac{\sqrt{2(\sqrt{137}-11)}}{2} - i \frac{\sqrt{2(\sqrt{137}+11)}}{2})$$

$$s = \frac{\sqrt{2(\sqrt{137}-11)}}{2} + i \frac{\sqrt{2(\sqrt{137}+11)}}{2}$$

On obtient alors comme solutions de l'équation :

$$B_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1+2i)}{2} + \frac{\sqrt{2(\sqrt{137}-11)}}{2 \times 2} + i \frac{\sqrt{2(\sqrt{137}+11)}}{2 \times 2}$$

$$B_1 = \frac{2 + \sqrt{2(\sqrt{137}-11)}}{4} + i \frac{(\sqrt{2(\sqrt{137}+11)} + 4)}{4}$$

$$B_2 = \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{(1+2i)}{2} - \frac{\sqrt{2(\sqrt{137}-11)}}{4} - i \frac{\sqrt{2(\sqrt{137}+11)}}{4}$$

$$B_2 = \frac{-(\sqrt{2(\sqrt{137}-11)} - 2)}{4} - i \frac{(\sqrt{2(\sqrt{137}+11)} - 4)}{4}$$

$$c) 4z^2 + (2-6i)z - (8+6i) = 0$$

on peut simplifier par 2 :

ii)

$$2z^2 + (1-3i)z - (4+3i) = 0$$

On a :

$$\Delta = (2-6i)^2 - 4 \times 4 \times -(8+6i) \rightarrow \Delta' = 24 + 18i \quad (-\frac{\Delta}{4})$$

$$= 4-24i - 36 + 16 \cdot (8+6i)$$

$$\Delta = 96 + 72i = c$$

(en cherchent à résoudre :  $s^2 = \Delta/c$ )

Or on sait que

$$s^2 = c \text{ , de plus } |c| = 120$$

On a le système suivant :

(en posant  $s = x+iy$ )

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ 2xy = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 96 = y^2 \\ xy = 36 \end{cases}$$

On a  $|s|^2 = |c|$  donc :

$$x^2 + y^2 = 120$$

$$x^2 + x^2 - 96 = 120$$

$$2x^2 = 216 \Rightarrow x = \sqrt{108} = \sqrt{9 \times 4 \times 3} = \pm 6\sqrt{3}$$

d'où on tire :  $y = \pm 2\sqrt{3}$ . Or  $xy = 36$ , donc  $x$  et  $y$  sont de même signe. On obtient alors 2 solutions de la forme  $x+iy$ , et telles que

$$s = -6\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$$

$$s = +6\sqrt{3} + 2i\sqrt{3}$$

On a donc comme solutions de l'équation :

$$z = \frac{-b \pm s}{2a}$$

$$\text{d'où } \beta_1 = \frac{-2+6i - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i}{8}$$

$$\beta_1 = \frac{-1-3\sqrt{3}}{4} - \frac{i(\sqrt{3}-3)}{4}$$

$$\text{et } \beta_2 = \frac{-2+6i + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i}{8}$$

$$\beta_2 = \frac{-1+3\sqrt{3}}{4} + \frac{i(\sqrt{3}+3)}{4}$$

9) Pour résoudre cette équation, il suffit de prendre le conjugu des solutions du a).

$$\text{Soit } \beta_1 = \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}+3)} - 4}{4} - i \left( \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-3)} - 2}{4} \right)$$

$$\beta_2 = \frac{-(\sqrt{2(\sqrt{3}+3)} + 4)}{4} + i \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-3)} + 2}{4}$$

## Connexion

### Exercice n°7

\*  $\beta = -1$

$$|\beta| = 1$$

$$e^{i\theta} = \frac{\beta}{|\beta|} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{donc } \theta = \pi [2\pi]$$

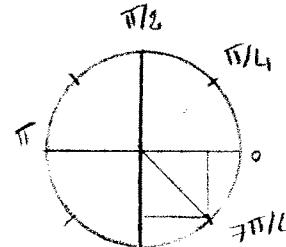
$$\beta = e^{i\pi}$$

\*  $\beta = 1-i$

$$|\beta| = \sqrt{2}$$

$$e^{i\theta} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

D'où  $\theta = \frac{7\pi}{4}$



$$\beta = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

\*  $\beta = -2\sqrt{3} + 2i$

$$|\beta| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et } \sin \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc  $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$$\beta = 4 e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

\*  $\beta = (1+i)(\sqrt{3}-i)$

$$|\beta| = |1+i| |\sqrt{3}-i|$$

$$|\beta| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(\beta) = \arg(1+i) + \arg(\sqrt{3}-i) \quad (2\pi)$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et } \arg(\sqrt{3}-i) = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou } \cos \theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta' = -\frac{1}{2}$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{6} \quad (2\pi)$$

$$\arg(\sqrt{3}-i) = \frac{\pi}{12}$$

Donc  $\arg(\sqrt{3}-i) = \frac{11\pi}{6}$

$$\beta = 2\sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} = z$$

\*  $\beta = \frac{1+i}{3-i}$

$$|\beta| = \frac{|1+i|}{|3-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\arg(\beta) = \arg(1+i) - \arg(3-i) = \frac{\pi}{4} - \arg(3-i)$$

$$\text{or } \cos \theta' = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ et } \sin \theta' = -\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ donc } \tan \theta' = -\frac{1}{3} \text{ et } \arg(3-i) = \arctan(-\frac{1}{3})$$

D'où  $\arg(\beta) = \frac{\pi}{4} - \arctan(-\frac{1}{3}) \in [0, 2\pi[$

$$\beta^5 = 1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = P^5 e^{i5\theta} \quad \text{avec } P = \sqrt[10]{8}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} \quad (k=0,1,2,3,4)$$

L'équation  $\beta^5 = 1+i$  a 5 solutions :

$$\beta_0 = \sqrt[10]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{5}\right)}, \beta_1 = \sqrt[10]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{5}\right)}, \beta_2 = \sqrt[10]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{10\pi}{5}\right)}, \beta_3 = \sqrt[10]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{14\pi}{5}\right)}$$

Exercice n° 8 :

$$\phi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \rightarrow \phi_1(z) = 2iz + 1 - 3i$$

$\phi_1$  est une similitude directe dont son point fixe est son centre  $z_0 \left( \frac{b}{1-a} \right)$

avec :  $b = 1 - 3i$  et  $a = 2i$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{1-2i} = \frac{(1-3i)(1+2i)}{1+4} = \frac{1+2i-3i-6}{5} = \frac{7}{5} - \frac{i}{5}$$

$$\rightarrow z_0 \left( \frac{7}{5} - \frac{i}{5} \right).$$

•  $\phi_1(z) = 2iz + 1 - 3i$

composée de :

nature : homothétie de rapport 2

- rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre  $0z$

- translation de vecteur  $1 - 3i$  on suppose la translation en prenant  $0z$  pour centre de la rotation, sinon il faut inverser l'ordre car les applications ne commutent pas.

$$\phi_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \rightarrow \phi_2(z) = (1-i)z + 1 - 3i$$

$\phi_2$  est une similitude directe dont son point fixe est son centre  $z_0 \left( \frac{b}{1-a} \right)$

avec :  $b = 1 - 3i$  et  $a = 1 - i$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{1-1+i} = \frac{1-3i}{i} = -(i+3) = -3-i \rightarrow z_0(-3-i)$$

•  $\phi_2(z) = (1-i)z + 1 - 3i$

composée de :

nature : - homothétie de rapport  $\sqrt{2}$

- rotation d'angle  $\frac{-\pi}{4}$  de centre  $0z$

- translation de vecteur  $1 - 3i$  même remarque

$$\phi_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} ; z \mapsto \phi_3(z) = (1+i\sqrt{3})z + 1-3i$$

Le point fixe :

$$f(z) = z \Rightarrow (1+i\sqrt{3})z + 1-3i = z \Leftrightarrow z(1+i\sqrt{3}-1) = 3i+1 \Rightarrow$$

$$z = \frac{3i+1}{i\sqrt{3}} = -\frac{(-3-i)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$\phi_3(z) = (1+i\sqrt{3})z + 1-3i$$

composée d'une  
matrice homothétie de rapport 2

et d'une rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  de centre  $\sqrt{3}(1 + \frac{i}{3})$

- (translation de vecteur  $1-3i$ . = inutile si on prend le point fixe comme centre de la rotation)

$$\phi_6 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} ; z \mapsto \phi_6(z) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)z + 2+i$$

$\phi_6$  est une similitude directe son seul point fixe est son centre  $\omega \left( \frac{b}{1-a} \right)$   
avec  $b = 2+i$  et  $a = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$  car  $a \neq 1$ .

$$\frac{b}{1-a} = \frac{2+i}{1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}} = \frac{2+i}{\frac{2-\sqrt{3}+i}{2}} = \frac{4+2i}{(2-\sqrt{3})+i} = \frac{(4+2i)((2-\sqrt{3})-i)}{(2-\sqrt{3})^2 - i^2} = \frac{8-4\sqrt{3}-4i+4i-2i\sqrt{3}+2}{4-4\sqrt{3}+3+1} =$$

$$\frac{10-6\sqrt{3}-2i\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}} = \cancel{\frac{10-6\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}} + \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \left( \cancel{\frac{-10\sqrt{3}}{4}} + 1 \right) + \frac{i}{2} = \frac{(10-4\sqrt{3}-2i\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} =$$

$$\rightarrow \omega \left( \cancel{\frac{-5\sqrt{3}}{2} + 1}, \frac{i}{2} \right) \text{ il faut voir l'erreur en calculant } \phi_6(w) \dots \text{ il faut trouver } w. \quad \omega \text{ point d'affixe } w$$

$$\phi_6(z) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)z + 2+i$$

nature: translation d'angle  $\frac{\pi}{6}$ , de centre  $\omega$

- (translation de vecteur  $2+i$ )