Feuille 2
Systèmes linéaires

Exercice 1 – Déterminer les éléments de $\mathbf{R}^2$:

$$a)\ 2(-1,4)+5(2,-2) \quad ; \quad b)\ 2(-1,-2)+2(2,7)-(2,3) \quad ; \quad c)\ 3(4,0)-2(0,\frac{1}{3})$$

Exercice 2 – Déterminer les éléments de $\mathbf{R}^4$:

$$a)\ 3(1,-1,\frac{2}{9},\frac{1}{3})-2(3,-4,\frac{1}{2},5) \quad ; \quad b)\ 7(2,0,-2,1)-(14,1,-14,2)+(1,0,-1,0)$$

Exercice 3 – Pour $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, préciser à l'aide de x_1, x_2 les éléments de $\mathbf{R}^3$:

$a)$ $(-1,2,-3)+x_1(3,0,1)+x_2(0,1,2)$; $b)$ $x_1(1,\frac{1}{2},3)+x_2(-1,1,1)$

$c)$ $(-7,0,4)+x_1(1,-1,0)-x_2(\frac{1}{3},\frac{1}{4},2)$; $d)$ $5((x_1,-2,3)-(1,x_2,4))$

$e)$ $2(3(-4,1,x_1))$; $f)$ $92(-17,5x_1,607)+8(-17,5x_1,607)$

Exercice 4 – Soit $x \in \mathbf{R}$, décomposer sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{R}^3$ indépendants de x :

$$a)\ (2+3x,-1+\frac{1}{2}x,17) \quad ; \quad b)\ (7-4x,\frac{1}{3}+\frac{4}{5}x,2x)+(3+4x,4,-2x)$$

Exercice 5 – Soit $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, décomposer sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{R}^3$ indépendants de x_1, x_2 :

$a)$ $(2-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2, 5+3x_1-7x_2, \frac{1}{2}x_1)$; $b)$ $(-4-x_2, 1+\frac{1}{2}x_2+x_1, 2-17x_1+x_2)$

$c)$ $(2x_2, x_1+x_2, -x_1)$; $d)$ $(1-2x_2+x_1, x_1, x_2)$

Exercice 6 – Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, décomposer sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{R}^3$ indépendants de x_1, x_2, x_3 :

$a)$ $(-1+x_1+2x_2-x_3, 17+2x_1-x_2+x_3, -1-x_1+x_2-x_3)$

$b)$ $(-1+x_2+2x_1-x_3-\frac{1}{2}x_1, 17+2x_3-x_2+x_1+\frac{1}{3}x_3, -1-x_2+x_3-x_1-\frac{1}{2}x_2)$

$c)$ $(x_2, x_3, 7-5x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3)+(0,4x_2-1,2x_3)$

$d)$ $(x_2+2x_1-x_3, 17+2x_3-x_2+x_1, -x_2+x_3-x_1)+(x_3,-x_1,7x_2)$

Exercice 7 – Expliciter dans $\mathbf{R}^3$ les solutions des systèmes :

$$(S_1)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (S_2)\ :\ \left\{ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \right.$$

Interpréter géométriquement les solutions de ces deux systèmes.

Expliciter dans $\mathbf{R}^3$ les solutions du système :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = & -9 \end{array}\right.$$

Que représente géométriquement cet ensemble de solutions ?

Exercice 8 – $K = \mathbf{R}$. On considère les variables x_1, x_2, x_3 ordonnées naturellement. Appliquer l'algorithme de Gauss pour trianguler les deux systèmes :

$$(S_1)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x_2 - 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (S_2)\ :\ \begin{array}{rcl} x_2 - 4x_3 & = & 17,17 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 & = & 1 \end{array}$$

En déduire les solutions de ces systèmes.
Même question avec $K = \mathbf{Q}$, $K = \mathbf{C}$.

Exercice 9 – $K = \mathbf{Q}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - x_4 & = & 0 \\ 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

On considère les variables x_1, x_2, x_3, x_4 ordonnées naturellement. Appliquer avec soin l'algorithme de Gauss pour trianguler ce système.
Expliciter les solutions du système (S).
Quelles sont les solutions de (S) formées de quadruplets d'entiers ?

Exercice 10 – Équilibrer l'équation chimique :

$$B_2 S_3 \quad + \quad H_2 0 \quad \longrightarrow \quad H_3 B 0_3 \quad + \quad H_2 S$$

Introduire de même un système linéaire pour équilibrer l'équation chimique :

$$Pb\,N_6 \quad + \quad Cr\,Mn_2\,O_8 \quad \longrightarrow \quad Pb_3\,O_4 \quad + \quad Cr_2\,O_3 \quad + \quad Mn\,O_2 \quad + \quad N\,O$$

Expliciter les solutions de ce système linéaire.Puis, en déduire l'équation équilibrée.

Exercice 11 – $K = \mathbf{Q}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 & = & 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 3 \end{array}\right.$$

On considère les variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ordonnées naturellement. Trianguler le système à l'aide de l'algorithme de Gauss.
Expliciter les solutions du système (E) à l'aide des variables libres.
Mêmes questions en considérant comme ordre des variables : x_5 d'ordre 1, x_4 d'ordre 2, x_3 d'ordre 3, x_2 d'ordre 4, x_1 d'ordre 5.

Exercice 12 – $K = \mathbf{R}$. On considère les variables x_1, x_2, x_3 ordonnées naturellement. À l'aide de l'algorithme de Gauss, trianguler le système suivant, puis expliciter ses solutions :

$$(S)\ :\ \begin{array}{rcl} x_1 - 0,4x_2 - 0,6x_3 & = & 0 \\ -0,6x_1 + 0,9x_2 - 0,2x_3 & = & 0 \\ -0,4x_1 - 0,5x_2 + 0,8x_3 & = & 0 \end{array}$$

Une économie simplifiée comporte trois produits : charbon. acier, électricité. Sur l'année 2007 :
40/100 des "sorties" d'électricité 2007 sont achetées par le secteur charbon ,
10/100 des "sorties" d'électricité 2007 sont achetées par le secteur électricité,
50/100 des "sorties" d'électricité 2007 sont achetées par le secteur acier;
60/100 des "sorties" du charbon 2007 sont achetées par le secteur électricité,
40/100 des "sorties" du charbon 2007 sont achetées par le secteur acier;
60/100 des "sorties" de l'acier 2007 sont achetées par le secteur charbon,
20/100 des "sorties" de l'acier 2007 sont achetées par le secteur électricité,
20/100 des "sorties" de l'acier 2007 sont achetées par le secteur acier.

$$\left\{\begin{array}{l} p_c = d_c = \frac{2}{5}p_e + \frac{3}{5}p_a \\ p_e = d_e = \frac{1}{10}p_e + \frac{3}{5}p_c + \frac{1}{5}p_a \\ p_a = d_a = \frac{1}{2}p_e + \frac{2}{5}p_c + \frac{1}{5}p_a \end{array}\right.$$

(équilibre $p = d$)

Désignons par p_E le prix des sorties d'électricité, p_C de charbon, p_A d'acier. Quelles sont les valeurs de p_E , p_C , p_A qui font que les prix de sorties équilibrent les prix de dépenses des trois secteurs charbon. acier. électricité ?

Exercice 13 – On considère l'équation linéaire : $(E)\ :\ 2x_1 + 3x_2 = 7$. Expliciter les solutions de cette équation lorsque le corps K est respectivement : $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$,$\mathbf{C}$.
Déterminer les couples d'entiers relatifs (x_1, x_2) solutions de l'équation (E).
Même exercice avec l'équation : $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 17$.

$2x_1 + 3x_2 = -5x_3$

Exercice 14 – On considère l'équation linéaire à coefficients complexes :

$$(E)\quad :\quad (1+i)x_1 - ix_2 = 3$$

Expliciter les solutions complexes de ce système.
Déterminer les couples de réels (x_1, x_2) solutions de l'équation (E).

Exercice 15 – $K = \mathbf{R}$. On considère les variables x_1, x_2, x_3, x_4 ordonnées naturellement. Appliquer avec soin l'algorithme de Gauss pour trianguler le système.

$$(E_1)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Quelles sont les variables libres ? Expliciter les solutions de ce système.
Même question avec le système :

$$(E_2) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 & = & 3 \end{array} \right.$$

Expliciter les solutions du système :

$$(E) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 & = & 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 & = & 3 \end{array} \right.$$

Exercice 16 - $K = \mathbf{R}$. Soit $a, b \in \mathbf{R}$, on considère le système d'équations linéaires de variables x, y, z :

$$E(a,b) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & 3 \\ x + 2ay + z & = & 4 \\ x + y + bz & = & 3 \end{array} \right.$$

La première variable étant x, la deuxième y et la troisième z, expliciter avec précision suivant les valeurs du couple (a, b) l'algorithme de Gauss de triangulation donné dans le cours du système $E(a, b)$.
En déduire en fonction des valeurs du couple (a, b) les solutions de ce système.

Exercice 17 - $K = \mathbf{C}$. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$, on considère le système d'équations linéaires de variables x, y, z :

$$E(\lambda) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (1-\lambda)x + 2y - 2z & = & 0 \\ -x + (3-\lambda)y & = & 0 \\ 2y + (1-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Montrer que si $(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) \neq 0$ le système admet $(0,0,0)$ comme unique solution.
Déterminer les nombres complexes λ tels que $(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$.
Montrer que $(x, y, z) \in \mathbf{C}^3$ est une solution de $E(\lambda)$ si et seulement si $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ est une solution de $E(\overline{\lambda})$. En déduire une bijection des solutions de $E(\lambda)$ vers les solutions de $E(\overline{\lambda})$.
Expliciter pour chacune des valeurs de λ vérifiant $(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$ les solutions de $E(\lambda)$.