ESPERTO
Vanessa

Correction Exercice 7 feuille n°2

(S_1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 4x_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = 7x_3 \\ x_2 = 4x_3 \end{cases}$ x_3 variable libre

L'ensemble S_1 des solutions est :

$S_1 = \{ (7x_3, 4x_3, x_3) \; x_3 \in R \}$ → l'ensemble des solutions représente une droite passant par les points de coordonnées $(0,0,0)$ et $(7,4,1)$

(S_2) : $-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$

soit $x_1 = \frac{9}{4} + \frac{5}{4}x_2 + \frac{9}{4}x_3$

où x_2 et x_3 sont des variables libres.

L'ensemble S_2 des solutions est :

$S_2 = \{ (\frac{9}{4} + \frac{5}{4}x_2 + \frac{9}{4}x_3, x_2, x_3) \; x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ (\frac{9}{4}, 0, 0) + x_2 (\frac{5}{4}, 1, 0) + x_3 (\frac{9}{4}, 0, 1) \; x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2 \}$

Cet ensemble représente le plan passant par le point de coordonnées $(\frac{9}{4}, 0, 0)$ et de vecteurs directeurs $(\frac{9}{4}, 0, 1)$ et $(\frac{5}{4}, 1, 0)$

(S) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & (L_1) \\ 2x_2 - 8x_3 = 0 & (L_2) \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & (L_3) \end{cases}$

On triangularise le système.

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & L_1' \leftarrow L_1 \\ 2x_2 - 8x_3 = 0 & L_2' \leftarrow L_2 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 & L_3' \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{cases}$

on aurait pu diviser par 2 !

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 - 8x_3 = 0 \\ 2x_3 = -18 & 3L_2' + 2L_3' \end{cases}$

On a donc : $x_3 = -9$

$x_2 = -36$

$x_1 = -63$.

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donc : $\mathcal{S} = \{(-63, -36, -9)\}$

C'est un point.

Autre méthode :

On remarque que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ donc on cherche : x, x_2, x_3 tq

$$x(7,4,1) = \left(\frac{9}{4}, 0, 0\right) + \left(\frac{5}{4}x_2, x_2, 0\right) + \left(\frac{9}{4}x_3, 0, x_3\right)$$

soit $\begin{cases} 7x = \frac{9}{4} + \frac{5}{4}x_2 + \frac{9}{4}x_3 \\ 4x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$

d'où $7x = \frac{9}{4} + 5x + \frac{9}{4}x$

soit $x = -9$.

On retrouve bien le même résultat : $\mathcal{S} = \{(-63, -36, -9)\}$

Correction de l'exercice 9 de la feuille 2

Soit $K = \mathbb{Q}$

$$(S) : \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 & L_1 \\ 3x_1 - x_4 = 0 & L_2 \\ 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 & L_3 \\ x_2 - 3x_3 = 0 & L_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 & L_1' \leftarrow L_1 \\ -3x_3 + 2x_4 = 0 & L_2' \leftarrow 3L_1 - 2L_1 \\ 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 & L_3' \leftarrow L_3 \\ 3x_3 - 2x_4 = 0 & L_4' \leftarrow L_3 - 2L_4 \end{cases}$$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

x_4 est la variable libre.

$$\begin{cases} x_3 = \frac{2}{3} x_4 \\ 2x_2 - 2x_4 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - \frac{2}{3} x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = \frac{2}{3} x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_1 = \frac{1}{3} x_4 \end{cases}$$

L'ensemble S des solutions est donc :

$$S = \{ (\tfrac{1}{3} x_4, 2x_4, \tfrac{2}{3} x_4, x_4) \; x_4 \in \mathbb{Q} \}$$

$$\{ (\tfrac{1}{3}, 2, \tfrac{2}{3}, 1) x_4 \;, x_4 \in \mathbb{Q} \}$$

Les solutions de (S) formées de quadruplets d'entiers sont :

$$S_n = \{ (\tfrac{1}{3} \times 3k, 2 \times 3k, \tfrac{2}{3} \times 3k, 3k) \; k \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \{ (1, 6, 2, 3) k, \; k \in \mathbb{Z} \}$$

Correction de l'exercice 14 de la feuille 2

(E) : $(1+i)x_1 - ix_2 = 3 \iff 2x_1 - i(1-i)x_2 = 3(1-i)$

$\iff 2x_1 = 3(1-i) + (i+1)x_2$

d'où $x_1 = \dfrac{3-3i}{2} + \dfrac{i+1}{2}x_2$

$\Updownarrow$

$(1+i)x_1 + x_2 = 3i$

d'où $x_2 = (1-i)x_1 + 3i$

L'ensemble S des solutions de l'équation est donc :

$S = \left\{ \left(\dfrac{3-3i}{2} + \dfrac{i+1}{2}x_2 , x_2 \right) x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ (x_1, x_1 - ix_1 + 3i), x_1 \in \mathbb{C} \right\}$

$= \left\{ \left(\dfrac{3-3i}{2}, 0 \right) + x_2 \left(\dfrac{i+1}{2}, 1 \right) \; x_2 \in \mathbb{C} \right\}$

On cherche maintenant les couples réels (x_1, x_2) solutions de l'équation (E)

$(1+i)x_1 - ix_2 = 3 \iff x_1 + ix_1 - ix_2 = 3$

$\iff \underbrace{x_1}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\in \mathbb{R}} = 3$

par identification on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble $S_{\mathbb{R}}$ des solutions est donc :

$S_{\mathbb{R}} = \{(3, 3)\}$