Exercice 8

$$(\text{Système } 1)\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 & ① \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 & ② \\ \quad\quad x_2 - 4x_3 = 3 & ③ \end{cases}$$

$2 \times ① - 5 \times ②$

$$\begin{matrix} ① \\ \\ ③ \end{matrix}\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \\ -x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

x_3 est une variable libre.

$$x_2 = 3 + 4x_3$$

$$5x_1 = 1 + 8x_2 - 7x_3$$
$$= 25 + 25x_3$$
$$x_1 = 5 + 5x_3$$

$$\mathcal{S}_1 = \{(5 + 5x_3 ; 3 + 4x_3 ; x_3) ; x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{S}_1 = \{[(5;3;0) + x_3(5;4;1)] ; x_3 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ c'est ~~une~~ la droite passant par le point $A(5;3;0)$ et de vecteur directe $x_3(5;4;1)$.

$$(\text{Système } 2)\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 & ① \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 & ② \\ \quad\quad x_2 - 4x_3 = 17{,}17 & ③ \end{cases}$$

$2' = 2 \times 1 - 5 \times 2$

$$\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 & (1) \\ \quad - x_2 + 4x_3 = -3 & (2') \\ \quad x_2 - 4x_3 = 17{,}17 & (3) \end{cases}$$

(2') et (3) sont incompatibles

$S_2 = \{\emptyset\}$

Correction feuille 2

Exercice n° 18

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$(S)\begin{cases} x_1 - 0{,}4x_2 - 0{,}6x_3 = 0 \\ -0{,}6x_1 + 0{,}9x_2 - 0{,}2x_3 = 0 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \ (L_1) \\ -6x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 0 \ (L_2) \\ -4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \ (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \ (L_1') \\ 33/5\, x_2 - 28/5\, x_3 = 0 \ (L_2') \leftarrow (L_2) + \frac{6}{10}(L_1) \\ -33/5\, x_2 + 28/5\, x_3 = 0 \ (L_3') \leftarrow (L_3) + \frac{4}{10}(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ \frac{33}{5}x_2 - \frac{28}{5}x_3 = 0 \quad (\Leftrightarrow 33x_2 - 28x_3 = 0) \end{cases}$$

(1) après avoir vu ça, on peut remarquer plus simplement que $(L_1) + (L_2) = -(L_3)$ donc on n'écrit plus (L_3).

Soit x_3 une variable libre, d'où :

$$x_2 = \frac{28}{\cancel{5}}x_3 \times \frac{\cancel{5}}{33} = \frac{28}{33}x_3$$

$$\text{et } x_1 = \left(6x_3 + 4 \times \frac{28}{33}x_3\right) \times \frac{1}{10} = \frac{310}{33}x_3 \times \frac{1}{10} = \frac{31}{33}x_3$$

Donc les solutions sont : $S = \left\{\left(\frac{31}{33}x_3 \,;\, \frac{28}{33}x_3 \,;\, x_3\right) x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{31}{33}, \frac{28}{33}, 1\right)x_3 \,;\, x_3 \in \mathbb{R}\right\}}$$

Pour que les prix de sorties équilibrent les prix de dépenses des trois secteurs, on obtient :

$$\begin{cases} 0{,}4\,P_E + 0{,}6\,P_A = (0{,}6\,P_C + 0{,}4\,P_C)\ P_C \\ 0{,}1\,P_E + 0{,}6\,P_C + 0{,}2\,P_A = (0{,}4\,P_E + 0{,}1\,P_E + 0{,}5\,P_E \\ 0{,}5\,P_E + 0{,}4\,P_C + 0{,}2\,P_A = (0{,}6\,P_A + 0{,}2\,P_A + 0{,}2\,P_A \end{cases} \quad "P_A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}4\,P_E + 0{,}6\,P_A - P_C = 0 \\ -0{,}9\,P_E + 0{,}2\,P_A + 0{,}6\,P_C = 0 \\ 0{,}5\,P_E - 0{,}8\,P_A + 0{,}4\,P_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_C - 0{,}4\,P_E - 0{,}6\,P_A = 0 \\ -0{,}6\,P_C + 0{,}9\,P_E - 0{,}2\,P_A = 0 \\ -0{,}4\,P_C - 0{,}5\,P_E + 0{,}8\,P_A = 0 \end{cases}$$

Donc les solutions sont les mêmes que pour le système (S), il suffit que le "directeur de l'usine" fixe un prix de sortie pour l'acier (P_A) et puis les autres prix seront calculés en fonction de P_A :

$$\text{Soit } \begin{cases} P_E = \frac{28}{33}P_A \\ P_C = \frac{31}{33}P_A \end{cases}$$

FOUILHE
Cécile
L1 MP Gp 1

ALGÈBRE - Feuille 2
SYSTÈMES LINÉAIRES

Ex 15 :

K = ℝ
Triangularisation de systèmes par l'algorithme de Gauss.

$$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & L_1 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 2 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 & L_2 - L_1 = L'_2 \end{cases}$$

Le système est triangulé.
Les variables libres sont x_3 et x_4.
Avec L'_2 on obtient :

$$x_2 = -1 + x_3 - 2x_4$$

que l'on remplace dans L_1 :

$$(L_1) \Leftrightarrow x_1 + (-1 + x_3 - 2x_4) + x_3 + x_4 = 1$$
$$\Leftrightarrow x_1 + 2x_3 - x_4 = 2$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 2 - 2x_3 + x_4$$

$$S = \{(2 - 2x_3 + x_4, -1 + x_3 - 2x_4, x_3, x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\boxed{S = \{(2,-1,0,0) + x_3(-2,1,1,0) + x_4(1,-2,0,1), x_3, x_4 \in \mathbb{R}^2\}}$$

est le plan passant par le point (2,-1,0,0) et engendré par les 2 vecteurs (-2,1,1,0) et (1,-2,

$$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 2 & L_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 3 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \cancel{x_3} + 2x_4 = 3 & L_2 \cancel{- L_1} = L_1' \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 & L_1 = L_2' \end{cases}$$

Le système est triangulé.
Les variables libres sont x_3 et x_4.
Avec L_1 on obtient :

$$x_2 = 2 + x_3 - x_4$$

que l'on remplace dans L_2 :

$$(L_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 + x_3 - x_4 + 2x_4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1 - x_3 - x_4$$

$$S = \{(1 - x_3 - x_4, 2 + x_3 - x_4, x_3, x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\boxed{S = \{(1,2,0,0) + x_3(-1,1,1,0) + x_4(-1,-1,0,1), x_3, x_4 \in \mathbb{R}^2\}}$$

est le plan passant par le point (1,2,0,0) et engendré par

$$(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & L_1 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 2 & L_2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 & L_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 3 & L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & L_1 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 & L_2' = L_2 - L_1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 & L_3 \\ -x_3 + x_4 = 2 & L_4' = L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & L_1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 & L_3 \\ -x_3 + x_4 = 2 & L_4' \\ -x_4 = 3 & L_2'' = L_2' + L_3 \end{cases}$$

Le système est triangulé.
On remonte l'algorithme de Gauss à partir de $x_4 = -3$, c'est-à-dire de la dernière équation.
On trouve successivement :

$$(L_4') \Leftrightarrow -x_3 + x_4 = 2$$
$$\Leftrightarrow -x_3 - 3 = 2$$
$$\Leftrightarrow x_3 = -5$$

$$(L_3) \Leftrightarrow x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$\Leftrightarrow x_2 - (-5) + (-3) = 2$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$

$$(L_1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$\Leftrightarrow x_1 + 0 - 5 - 3 = 1$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 9.$$

On vérifie que $(9, 0, -5, -3)$ est bien solution de chaque équation de (E_3) :

$$(L_1) \; \cancel{\Leftrightarrow} : \; 9 + 0 - 5 - 3 = 1$$
$$(L_2) \; \cancel{\Leftrightarrow} : \; 9 + 2 \times (-5) - (-3) = 2$$
$$(L_3) \; \cancel{\Leftrightarrow} : \; 0 - (-5) + (-3) = 2$$
$$(L_4) \; \cancel{\Leftrightarrow} : \; 9 + 0 + 2 \times (-3) = 3$$

$$\boxed{S = \{(9, 0, -5, -3)\}}.$$

(MONSIFROT

Feuille 2 : systèmes linéaires

Exercice 16. $a, b \in \mathbb{R}$

$$E(a,b) : \begin{cases} x + ay + z = 3 \\ x + 2ay + z = 4 \\ x + y + bz = 3 \end{cases}$$

⊛ **si $a = 0$**, le système devient

$$E(0,b) : \begin{cases} x + z = 3 & (L_1) \\ x + z = 4 & (L_2) \\ x + y + bz = 3 & (L_3) \end{cases}$$

(L_1) et (L_2) sont incompatibles donc $\boxed{\text{si } a = 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \mathcal{S} = \emptyset}$

⊛ **si $b = 1$**, le système devient

$$E(a,1) : \begin{cases} x + ay + z = 3 & (L_1) \\ x + 2ay + z = 4 & (L_2) \\ x + y + z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Il y a alors 2 cas :

si $a \neq 1$: (L_1) et (L_3) ~~sont alors incompatibles~~ donnent : $\boxed{y=0}$ puis L_1 et L_2 incompatibles donc

$$\boxed{\text{si } b = 1 \text{ et } a \in \mathbb{R}, a \neq 1 \quad \mathcal{S} = \emptyset}$$

si $a = 1$: le système devient

$$E(1,1) : \begin{cases} x + y + z = 3 & (L_1) \\ x + 2y + z = 4 & (L_2) \\ x + y + z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

ici (L_1) et (L_3) sont compatibles, identiques (on n'en écrit qu'une des deux) on triangule alors le système

$$E(1,1) : \begin{cases} x + y + z = 3 & (L_1) \\ y = 1 & (L_2') \leftarrow (L_2) - (L_1) \\ \cancel{x + y + z = 3} & \cancel{(L_3) = (L_1)} \end{cases}$$

inutile on ne l'écrit pas 2 fois !

d'où $y = 1$ et $x + z = 2$

z est variable libre

$x = 2 - z$

$y = 1$

donc si $a = 1$ et $b = 1$

$$\boxed{S = \{ z(-1, 0, 1) + (2, 1, 0) \ , \ z \in \mathbb{R} \}}$$

(*) si $a \neq 0$ et $b \neq 1$, on triangule le système

$$E(a,b) = \begin{cases} x + ay + z = 3 & (L_1) \\ x + 2ay + z = 4 & (L_2) \\ x + y + bz = 3 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 & (L_1) \\ ay = 1 & (L_2') \leftarrow (L_2) - (L_1) \\ y(1-a) + z(b-1) = 0 & (L_3') \leftarrow (L_3) - (L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 & (L_1) \\ y = \frac{1}{a} & (L_2) \\ y(1-a) + z(b-1) = 0 & (L_3) \end{cases}$$

c'est bon car $a \neq 0$ (hyp)

donc $z = \frac{1}{a} \frac{(1-a)}{(1-b)}$ où $b \neq 1$ (hypothèse)

et $x = 2 - z = 2 - \frac{1}{a}\frac{(1-a)}{(1-b)}$

donc si $a \neq 0$ et $b \neq 1$, la solution est 1 point du plan en fonct de a et b :

$$S = \left\{ \left(2 - \frac{1}{a}\frac{(1-a)}{(1-b)} , \frac{1}{a} , \frac{1}{a}\frac{(1-a)}{(1-b)} \right) \right\}$$