Université de Nice Sophia-Antipolis — L1 - MP - MI Algèbre

07-08 — semestre 2

Feuille 3

Calcul Matriciel

Exercice 1 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{Q})$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{Q})$.

1) Calculer A+ 2B, 3A-B.

2) Trouver $X \in M_{2,3}(\mathbf{Q})$ tel que $3X + A = B$.

3) Trouver $X, Y \in M_{2,3}(\mathbf{Q})$ tels que :

$$\begin{cases} X + 2Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases}.$$

4) Écrire A et B comme combinaison linéaire des six matrices :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'une telle décomposition de A (resp. B) est unique.

Exercice 2 – Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{Q}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{Q}).$$

1) Calculer BA, CB, AC, CA, B^2. $A \approx 2\times 3$

2) D'autres produits de deux matrices parmi $\{A, B, C\}$ sont-ils définis ? NON $B \approx 2\times 2$

3) Calculer $(3B)A$ et $B(2A)$. $C \approx 3\times 2$

Exercice 3 – Soit $C \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{Q})$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbf{Q})$.

1) Calculer les produits LC et CL.

2) Déterminer les matrices $X \in M_{1,3}(\mathbf{Q})$ tel que $XC = I_1$.

3) Existe-t-il $Y \in M_{3,1}(\mathbf{Q})$ tel que $YL = I_3$?

4) Soit $A \in M_{3,1}(\mathbf{Q})$ et $B \in M_{1,3}(\mathbf{Q})$, que dire des lignes et des colonnes de AB ?

Exercice 4 – Soit $A \in \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Q})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Q})$.

1) Calculer les produits AB, BA et $(A+B)^2$.

2) Déduire du calcul de AB que A et B ne sont pas inversibles.

3) Expliciter les matrices $Z \in M_2(\mathbf{Q})$ tels que $AZ = 0$.

4) Expliciter les matrices $X, Y \in M_2(\mathbf{Q})$ tels que $AX = AY$.

Exercice 5 – Soit $A, B \in M_m(K)$ des matrices carrées qui **commutent**, c'est à dire telles que $AB = BA$.
1) Montrer $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.
2) Montrer par récurrence :
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k \,.$$
Soit $A \in M_m(K)$ une matrice carrée.
3) Montrer que $A^2 - I_m = (A - I_m)(A + I_m)$ et $A^3 - I_m = (A - I_m)(A^2 + A + I_m)$.
4) Montrer par récurrence :
$$(A - I_m)(\sum_{i=1}^{n} A^i) = A^{n+1} - I_m \,.$$
5) En déduire que si $A^{n+1} = 0$, la matrice $I_m - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 6 – Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ où $K = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
1) Calculer J^2 et J^n pour tout entier n supérieur à 2.
2) Déterminer A^n pour tout entier n.
3) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4) Soit u_n, v_n deux suites d'éléments de K définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et la relation :
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \,.$$
Déterminer pour tout entier n, u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 7 – Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{K})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ où $K = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
1) Calculer J^2, J^3 et J^n pour tout entier n supérieur à 3.
2) Déterminer A^n pour tout entier n (on pourra remarquer que $A = 2I_3 + J$).
3) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 8 – $K = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $A \in M_n(K)$ et deux éléments $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ distincts.
On suppose dans cet exercice que la matrice A vérifie : $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) = 0$.
1) Montrer que $(A - \lambda_2 I_n)(A - \lambda_1 I_n) = 0$.
2) Vérifier l'égalité :
$$I_n = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I_n) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I_n)$$
3) Montrer que pour tout entier k :
$$A^k(A - \lambda_1 I_n) = {\lambda_2}^k(A - \lambda_1 I_n) \quad \text{et} \quad A^k(A - \lambda_2 I_n) = {\lambda_1}^k(A - \lambda_2 I_n) \,.$$

4) En déduire pour tout entier k :

$$A^k = \frac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1} A + \frac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1} I_n \,.$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

5) Vérifier que $(B - \frac{1+\sqrt{5}}{2} I_2)(B - \frac{1-\sqrt{5}}{2} I_2) = 0$.

6) En déduire l'expression de B^k pour $k \in \mathbf{N}$.

7) On considère la suite de réels définie par récurrence par $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 2$ et $u_1 = 1$, $u_0 = 0$. On pose alors pour $n \geq 1$, $v_n = u_{n-1}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \,.$$

8) En déduire l'expression de u_n.

9) Problème de dynamique de population (Fibonacci) : Enfermez un couple de lapins dans un enclos. Le premier mois de leur vie, il n'ont pas d'enfants. Tous les mois suivants, ils enfantent un couple de lapins. Chaque couple né agit alors de la même façon : le mois suivant sa naissance, il ne donne pas d'enfants, mais chaque mois, ensuite, il enfante un couple. Et ainsi de suite. Quel est le nombre de couples de lapins le n-ième mois ?

Exercice 9 – Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{K})$. On appelle trace de A la somme des éléments de la diagonale de A :

$$tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n} \,.$$

1) Vérifier que pour tout $A, B \in M_n(\mathbf{K})$: $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.

2) En déduire que pour tout $M \in Gl_n(K)$ et $A \in M_n(\mathbf{K})$: $\mathrm{tr}\,(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\,(A)$.

Exercice 10 – Soit $\mathrm{Diag_n}(K)$ l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbf{K})$.

Soit $D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Diag_n}(K)$.

1) Montrer que D est inversible si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$: $a_{i,i} \neq 0$. Déterminer alors D^{-1}.

2) Montrer que le produit de deux matrices diagonales est diagonale.

Soit $D' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{K})$. Notons $\mathrm{Diag_n}'(K)$ l'ensemble des matrices de cette forme.

1) Montrer que D' est inversible si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$: $a_{i,n-i} \neq 0$. Déterminer

alors D'^{-1}.
2) Que dire du produit de deux matrices de $\mathrm{Diag_n}'(K)$?
3) Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
4) Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Montrer alors que l'inverse d'une telle matrice est triangulaire supérieure.

Exercice 11 – Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q})$.
1) Préciser les matrices élémentaires de $Gl_3(\mathbf{Q})$:

$$D_1(\frac{1}{2}) \quad , \quad T_{3,1}(-1) \quad , \quad D_3(\frac{1}{2}) \quad , \quad T_{2,3}(-1)\,.$$

. 2) Déterminer les produits :

$$D_1(\frac{1}{2})I_2\ ,\ T_{3,1}(-1)D_1(\frac{1}{2})\ ,\ D_3(\frac{1}{2})T_{3,1}(-1)D_1(\frac{1}{2})\ ,\ T_{2,3}(-1)D_3(\frac{1}{2})T_{3,1}(-1)D_1(\frac{1}{2})\,.$$

3) Déterminer les produits :

$$D_1(\frac{1}{2})A\ ,\ T_{3,1}(-1)D_1(\frac{1}{2})A\ ,\ D_3(\frac{1}{2})T_{3,1}(-1)D_1(\frac{1}{2})A\ ,\ T_{2,3}(-1)D_3(\frac{1}{2})T_{3,1}(-1)D_1(\frac{1}{2})A\,.$$

En déduire A^{-1}.
4) Détailler ensuite l'algorithme du cours qui permet de déterminer A^{-1}. Constater que vous avez fait deux fois la même chose.
5) Ecrire A sous forme de produits de matrices élémentaires que l'on précisera.

Exercice 12 – 1) Montrer qu'il existe une unique matrice $S_{1,2,3}$ tel que pour tout $p \geq 1$ et $M \in M_{3,p}(\mathbf{K})$, la matrice produit $S_{1,2,3}\, M$ a pour première ligne la deuxième ligne de M, a pour deuxième ligne la troisième ligne de M et a pour troisième ligne la première ligne de M.
2) Déterminer $(S_{1,2,3})^2$ et $(S_{1,2,3})^3$. Quel est l'effet de la multiplication à gauche par $(S_{1,2,3})^2$ sur $M \in M_{3,p}(\mathbf{K})$?
3) Ecrire $S_{1,2,3}M$ comme produit de matrices élémentaires.

Exercice 13 – 1) En appliquant avec soin l'algorithme du cours, montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q})\,.$$

2) Ecrire ces matrices comme produits de matrices élémentaires.

Exercice 14 – Appliquer l'algorithme pour décider si une matrice M est inversible et pour calculer dans ce cas son inverse.

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q})$.

2) $M = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{Q})$.

3) $M = \begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$.

Exercice 15 – On considére une poutre homogène fixée à ses extrémités. On exerce des forces verticales f_1, f_2, f_3, f_4 en 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 de cette poutre. Le point A_1 (resp. A_2) est symétrique de A_4 (resp. A_3) par rapport au milieu de la poutre. Ces points se déplacent verticalement respectivement de y_1, y_2, y_3, y_4. On peut déduire de la loi de Hooke "ut tensio sic vis" qu'il existe une matrice $D \in M_4(\mathbf{R})$ tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} .$$

Pour cette poutre, la matrice D suivante convient :

$$D = \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0,5 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0,5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R}) .$$

où les coefficients de la matrice sont en centimètres par newton.

1) Que représentent physiquement les colonnes de cette matrice ? En déduire que cette matrice ne dépend que de la poutre. Elle est appelée matrice de flexibilité de la poutre. Expliquer physiquement pourquoi et comment ses deux dernières lignes se déduisent des deux premières.

2) Constater que D est symétrique, c'est à dire égale à sa transposée : $D = {}^tD$.

3) Calculer l'inverse de D appelée matrice de raideur. Déduire de la question 2 que cette matrice est symétrique.

4) Quel est en fonction de y_1, y_2, y_3, y_4 le travail des forces extérieures du système ?

5) Quels doivent être les forces (f_1, f_2, f_3, f_4) pour que les déplacements soient respectivement

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad (y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 0, 0, 1) .$$

Solution :

$$D^{-1} = 1000 \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & -\frac{13}{30} & \frac{7}{30} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{13}{30} & \frac{167}{240} & -\frac{113}{240} & \frac{7}{30} \\ \frac{7}{30} & -\frac{113}{240} & \frac{167}{240} & -\frac{13}{30} \\ -\frac{2}{15} & \frac{7}{30} & -\frac{13}{30} & \frac{8}{15} \end{pmatrix} .$$