Exercice 11 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$$

1°)

$$D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_3\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$T_{3,1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T_{2,3}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2°)

- $D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) I_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Impossible.

- $T_{3,1}(-1) D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $D_3\left(\tfrac{1}{2}\right) T_{3,1}(-1) D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- $T_{2,3}(1) D_3\left(\tfrac{1}{2}\right) T_{3,1}(-1) D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 1/2 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

3°)

- $D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $T_{3,1}(-1) D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• $\underline{D_3\left(\frac{1}{2}\right)T_{3,1}(-1)D_1\left(\frac{1}{2}\right)A} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

• $\underline{T_{2,3}(1)D_3\left(\frac{1}{2}\right)T_{3,1}(-1)D_1\left(\frac{1}{2}\right)A} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I_3$

Donc on en conclut que $A^{-1} = T_{2,3}(1)\,D_3\left(\frac{1}{2}\right)T_{3,1}(-1)\,D_1\left(\frac{1}{2}\right)$

donc $\boxed{\underline{A^{-1}} = \begin{pmatrix}1/2&0&0\\-1/4&1&1/2\\-1/4&0&1/2\end{pmatrix}}$

$\underline{\underline{4)}}$ Soit $\underline{A} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\underline{\text{Étape 0}}$: $(A_0, I_3) = \begin{pmatrix}2&0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}$

$\underline{\text{Étape 1}}$: $(A_1, M_1) = \begin{pmatrix}2&0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&4&-1&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L'_3 = 2L_3 - L_1\end{matrix}$ $\underline{\text{ou}}$ $\begin{pmatrix}1&0&\dots\\0&1&-\dots\\0&0&\dots\end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$ $\quad M = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$ $\quad \underline{MA = N}$

<u>Les éléments sur la diagonale de N sont tous non nuls, donc A est inversible.</u>

$\underline{\text{Étape 2}}$: $\begin{pmatrix}1&0&0&1/2&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}L'_1 = L_1/2\\L_2\\L''_3 = \frac{1}{4}L'_3\end{matrix}$ $\quad \begin{pmatrix}1&0&\dots\\0&1&\dots\\0&0&\dots\end{pmatrix}$

$\underline{\text{Étape 3}}$: $\begin{pmatrix}1&0&0&1/2&0&0\\0&1&0&-1/4&1&1/2\\0&0&1&-1/4&0&1/2\end{pmatrix}\begin{matrix}L'_1\\L'_2 = L_2 + L''_3\\L''_3\end{matrix}$

D'où l'on tire $\boxed{\underline{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 1/2 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$

On retrouve le même A^{-1} que dans la question 3).

5) Comme $\underline{A^{-1} = T_{2,3}(1)\, D_3\left(\frac{1}{2}\right) T_{3,1}(-1)\, D_1\left(\frac{1}{2}\right)}$

On en conclut que :

$$\underline{\underline{A = D_1(2)\, T_{3,1}(1)\, D_3(2)\, T_{2,3}(-1)}}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{matrix} \Bigg) \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}\right) L_1 = L'_1 & \rightsquigarrow \text{correspond à } D_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ L_2 = L'_2 & \\ L_3 - \frac{1}{2} L_1 = L'_3 & \rightsquigarrow \text{〃} \quad \text{〃} \quad T_{31}(-1) \\ L''_3 - L'_1 = & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} \Bigg) \begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L''_3 = \frac{1}{2} L_3 \end{matrix} \rightsquigarrow D_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 + L''_3 \\ L''_3 \end{matrix} \rightsquigarrow T_{23}(1)$$