Exercice 13:

1°)

* $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$

Montrer que la matrice est inversible et calculer son inverse:

Étape 0: $(M_0, I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}$

Étape 1: $(M_1, A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2' = L_2 - 2L_1 \end{matrix}$

$N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $AM = N$

M est inversible car les éléments sur la diagonale de N sont non nul

Étape 2: $(M_2, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2'' = \frac{-1}{2} L_2' \end{matrix}$

Étape 3: $(M_3, A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} L_1' = L_1 - 3L_2''$

d'où $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$

Étape 0: $(M'_0, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

Étape 1: $(M'_1, A_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) L'_3 = L_3 - L_2$ (3) $T_{3,2}(-1)$

M' est inversible, on a donc:

Etape 2: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) L'_2 = L_2 - 2L'_3$ (3) $T_{2,3}(-2)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) L'_1 = L_1 + L'_3$ (4) $T_{1,3}\,1$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) L''_1 = L'_1 - 2L'_2$ (5) $T_{12}(-2$

donc $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

2°) Les produits de matrices élémentaires sont :

* $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ~~or on sait que $M^{-1}M = I_3$~~

on a $T_{2,1}(-2).M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$D_2\left(\frac{-1}{2}\right) T_{2,1}(-2)\, M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Finalement on trouve :

$$T_{1,2}(-3)\,D_2\left(-\frac{1}{2}\right)T_{2,1}(-2)\,M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\underline{M^{-1} = T_{1,2}(-3)\,D_2\left(-\frac{1}{2}\right)T_{2,1}(-2)}}$

et $\boxed{\underline{M = T_{2,1}(2)\,D_2(-2)\,T_{1,2}(3)}}$

* Pour M' on a :

$$T_{3,2}(-1)\,M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{2,3}(-2)\,T_{3,2}(-1)\,M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,3}(1)\,T_{2,3}(-2)\,T_{3,2}(-1)\,M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2}(-2)\,T_{1,3}(1)\,T_{2,3}(-2)\,T_{3,2}(-1)\,M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc on en conclut que :

$\boxed{\underline{M^{-1} = T_{1,2}(-2)\,T_{1,3}(1)\,T_{2,3}(-2)\,T_{3,2}(-1)}}$

et $\boxed{\underline{M = T_{3,2}(1)\,T_{2,3}(2)\,T_{1,3}(-1)\,T_{1,2}(2)}}$