F 3

MONSIFROT

Exercice 5

1) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$
$= A^2 + 2AB + B^2$ car $AB = BA$

$(A+B)^3 = (A+B)(A^2+2AB+B^2) = A^3 + 2A^2B + AB^2 + BA^2 + 2BAB + B^3$
$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

vrai car $BA^2 = BAA = ABA = AAB = A^2B$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ on note $H(n) \xleftarrow{\text{l'égalité}}$: $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$

. $\underline{n=0}$ $(A+B)^0 = I = \sum_{0}^{0} \binom{0}{0} A^0 B^0$ c'est bon.
. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie, montrons que $H(n+1)$ est vrai

$(A+B)^{n+1} = (A+B)^n(A+B) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k\right)(A+B)$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1}$

on pose $k' = k+1$ $= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k + \sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}A^{n+1-k'}B^{k'}$

$= A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}A^{n+1-k}B^k + B^{n+1}$

$= A^{n+1} + B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]A^{n+1-k}B^k$

$= A^{n+1} + B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^k$

$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^k$

$H(n+1)$ vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $H(n)$ vraie.

3) $(A - I_m)(A + I_m) = A^2 + \cancel{AI_m} - \cancel{I_m A} - I_m^2$
$= A^2 - I_m$

où $I_m^2 = I_m$

$$(A - I_m)(A^2 + A + I_m) = A^3 + \cancel{A^2} + \cancel{AI_m} - \cancel{I_m A^2} - \cancel{I_m A} - I_m^2$$
$$= A^3 - I_m$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $H(n)$: l'égalité $\left(A - I_m\right)\left(\sum_{i=0}^{n} A^i\right) = A^{n+1} - I_m$

erreur d'énoncé : remplacer $\left(\sum_{i=1}^{n} A^i\right)$ par $\left(\sum_{i=0}^{n} A^i\right)$

. $n=0$ $\quad (A - I_m)\left(\sum_{i=0}^{0} A^0\right) = (A - I_m) I_m = A - I_m$ c'est bon

. Soit un $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie, montrons que $H(n+1)$ est vraie

$$(A - I_m)\left(\sum_{i=0}^{n+1} A^i\right) = (A - I_m)\sum_{i=0}^{n} A^i + (A - I_m) A^{n+1}$$
$$= \cancel{A^{n+1}} - I_m + A^{n+2} - \cancel{I_m A^{n+1}}$$
$$= A^{n+2} - I_m$$

$H(n+1)$ vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $H(n)$ est vraie

5) Si $A^{n+1} = 0$ dans la relation précédente

$$(A - I_m)\left(\sum_{i=0}^{n} A^i\right) = -I_m$$

donc $\quad (I_m - A)\left(\sum_{i=0}^{n} A^i\right) = I_m$

donc $(I_m - A)$ est inversible et son inverse est $\left(\sum_{i=0}^{n} A^i\right)$