FEUILLE 3

EXERCICE 6 :

Fouilhé Cécile

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(K)$ $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\forall n \geq 2,$ $J^n = J^{n-2} \times J^2$ ~~avec $n-2 \geq 0$~~

$= J^{n-2} \times 0$

$= 0$

$J^n = 0$ pour tout n supérieur à 2.

2) Soit $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l'hypothèse de récurrence.

$P(1)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P(2)$ $A \times A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P(2)$ vraie, démontrons que $P(n+1)$ vraie.

(on suppose $n \geq 2$ et $P(n)$ vraie)

$P(n+1)$: $A^{n+1} = A \times A^n$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $P(n+1)$ vraie, et $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

3) • Montrons que A est inversible.

$(A, I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

A est inversible car les coefficients de la première diagonale sont non nuls.

• Déterminons A^{-1}.

$(A, I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ en soustrayant la deuxième ligne à la première.

Il faut retrouver l'identité I_2 à gauche dans la matrice : la matrice $M_2(K)$ à droite est alors A^{-1}.

$$\left(\boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}\ \begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}\right) = \left(\boxed{I_2},\ A^{-1}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

4) u_n et v_n deux suites d'éléments de K définies par :

$u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et la relation :

$$\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_{n-1}\\ v_{n-1}\end{pmatrix} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On cherche les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.
Trois méthodes sont possibles pour le faire.

* Récurrence :

Soit $P(n)$: $u_n = 1$ et $v_n = 0$ ~~l'hypothèse de récurrence, $n \geq 0$.~~

Ça c'est pour $P(1)$! $\rightarrow$ $\cancel{A\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}$ ~~donc~~ $P(0)$ vraie par hypothèse

On suppose $n \geq 0$ et $P(n)$ vraie.

- Démontrons que $P(n+1)$ vraie :

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

Donc $u_{n+1} = 1$ et $v_{n+1} = 0$ et $P(n+1)$ vraie.

- Finalement $P(n)$ vraie pour tout n.

* Sans récurrence :

(en fait c'est une récurrence cachée)

$$\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_{n-1}\\ v_{n-1}\end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix}u_{n-2}\\ v_{n-2}\end{pmatrix} = \dots = A^n\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

Donc $u_n = 1$, $v_n = 0$ pour tout n.

* <u>Calcul direct de la matrice :</u>

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} u_n = u_{n-1} + v_{n-1} & (L_1) \\ v_n = v_{n-1} & (L_2) \end{cases}$

Mais si $v_n = \cancel{v_{n-1}}$

alors $\cancel{v_{n-1}} = \cancel{v_{n-2}}$

$\vdots$

et $\cancel{v_1} = v_0$

$v_n = v_0 = 0$: par somme membre à membre.

Donc (L_2) donne $v_n = 0$

et (L_1) donne $u_n = u_{n-1} = u_0 = 1$ par le même procédé que ci-dessus.

Finalement $u_n = 1$ et $v_n = 0$.