Correction de l'exercice n°9 feuille 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(K)$

$tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$

1/ Vérifions que pour tout $A, B \in M_n(K)$. $tr(AB) = tr(BA)$

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K)$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K)$

Posons $AB = C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

et $BA = D = (d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

On a
$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} C_{i,i} \underset{\text{car } C = AB}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} \right)$$
$$\underset{\text{car } \mathbb{K} \text{ est un corps}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right)$$
$$\underset{\text{car } D = BA}{=} \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = tr(D)$$

D'où $tr(AB) = tr(BA)$ (*)

2/ En déduire que pour tout $M \in Gl_n(K)$ et $A \in M_n(K)$ $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$

P est inversible, $P \in Gl_n(K)$:

$$tr(P^{-1}AP) = tr(P^{-1}(AP)) \underset{(*)}{=} tr((AP)P^{-1}) = tr(A)$$