Feuille 3

MOUNIER Cedric

Exercice 1

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

1) $$A+2B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-6 & 0+2 & -2+2\\ 4+4 & 1+0 & 0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 0\\ 8 & 1 & -6\end{pmatrix}$$

$$3A-B=3\times\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+3 & 0-1 & -6-1\\ 12-2 & 3-0 & 0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -1 & -7\\ 10 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

2) $3X+A=B \iff X=\frac{1}{3}(B-A)$

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3-1 & 1-0 & 1+2\\ 2-4 & 0-1 & -3-0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1\\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}$$

3) $$\begin{cases}X+2Y=A\\ 2X+Y=B\end{cases} \iff \begin{cases}X+2Y=A\\ -3Y=B-2A\end{cases}$$

$$Y=\frac{1}{3}(2A-B)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+3 & 0-1 & -4-1\\ 8-2 & 2-0 & 0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\\ 2 & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$X=A-2Y=\begin{pmatrix}\frac{3}{3}-\frac{10}{3} & 0+\frac{2}{3} & -\frac{6}{3}+\frac{10}{3}\\ 4-4 & \frac{3}{3}-\frac{4}{3} & 0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & -2\end{pmatrix}$$

4) $A = E_{1,1} + 4E_{2,1} + E_{2,2} - 2E_{1,3}$

$B = -3E_{1,1} + 2E_{2,1} + E_{1,2} + E_{1,3} - 3E_{2,3}$

ROCCHIA
Laurence

TD n°3

Exercice 2

① * $BA = \underset{\mathcal{M}_{2,2}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \times \underset{\mathcal{M}_{2,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \in \mathcal{M}_{2,3}$

Ce produit est possible car le nombre d'élément par ligne de B est égal au nombre d'éléments par colonne de A.

$$\boxed{BA = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

* $CB = \underset{\mathcal{M}_{3,2}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \times \underset{\mathcal{M}_{2,2}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \in \mathcal{M}_{3,2}$

$$\boxed{CB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

* $AC = \underset{\mathcal{M}_{2,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \times \underset{\mathcal{M}_{3,2}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \in \mathcal{M}_{2,2}$

$$\boxed{AC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}}$$

* $CA = \underset{M_{3,2}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \times \underset{M_{2,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \in M_{3,3}$

$$\boxed{CA = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ -7 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

* $B^2 = \underset{M_{2,2}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \times \underset{M_{2,2}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \in M_{2,2}$

$$\boxed{B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

(2) Parmi $\{A, B, C\}$, le produit :

- $A \times B$ n'est pas défini car le nombre d'éléments par ligne de A "(3)" n'est pas égal au nombre d'éléments par colonne de B "(2)"

- $B \times C$ " " " " " pas ligne de B ("2") n'est pas égal au nombre d'éléments par colonne de C ("3

- A^2 n'est pas défini car A ne contient pas le même nombre d'éléments par colonne que par ligne. C'est la même chose pour C^2.

③ * $(3B) \times A = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -9 & -3 & -6 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

* $B \times (2A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Multiplier une matrice : plus en détails ...

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Première ligne, première colonne : $1 \times 1 + (-1) \times (-1) = 1 + 1 = 2$.
Première ligne, deuxième colonne : $1 \times (-1) + (-1) \times 1 = (-1) + (-1) = -2$.
Deuxième ligne, première colonne : $(-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = (-1) + 1 = -2$.
Deuxième ligne, deuxième colonne : $(-1) \times (-1) + 1 \times 1 = 1 + 1 = 2$.

$$\Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2.) Voici toutes les combinaisons que l'on pourrait faire avec A, B et C :

$\cancel{A^2}$; $\underline{B^2}$; $\cancel{C^2}$; $\cancel{AB}$; $\underline{AC}$; $\underline{BA}$; $\underline{\cancel{BC}}$; $\underline{CA}$ et $\underline{CB}$.

Sont soulignées toutes celles de l'énoncé.
Sont barrées toutes celles qui sont impossible à multiplier.
En effet, pour pouvoir multiplier deux matrices entre elles, il faut que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes que comprend la deuxième, ce qui n'est pas le cas des "produits" barrés.