Feuille 3

exercice 3 :

1. $LC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

$$CL = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

2. On cherche les matrices $X \in M_{1,3}(\mathbb{Q})$ *tel que* $XC = I_1$.

On pose $X = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Alors $XC = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = a + 2b - 2c$

$XC = I_1$ *équivaut alors à* $a + 2b - 2c = 1$ *c'est à dire* $a = 2c - 2b + 1$
b et c sont des variables libres.

$S = \{ \begin{bmatrix} 2c - 2b + 1 & b & c \end{bmatrix};\ b, c \in \mathbb{Q} \}$

3. *On cherche* $Y \in M_{3,1}(\mathbb{Q})$ *tel que* $YL = I_3$.

On pose $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Alors $YL = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ b & 2b & 3b \\ c & 2c & 3c \end{bmatrix}$

$YL = I_3$ *équivaut à* $\begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ b & 2b & 3b \\ c & 2c & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Or si $a = 1$ *alors* $2a \neq 0$

D'où $S = \varnothing$

4. *Chaque ligne (resp. colonne) de AB sera proportionnelle à B (resp. à A).*

Feuille 3

exercice 4 :

1. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 0$

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}$

$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

2. *Supposons A inversible ie $\exists\, A' \in M_2(\mathbb{Q}), AA' = A'A = I_2$.*
D'aprés 1. $AB = 0$
En multipliant par A' : $A'AB = 0$
Donc $I_2 B = 0$
Donc $B = 0$ *ce qui n'est pas.*
Ainsi A n'est pas inversible.
On démontre de même que B n'est pas inversible.

3. *On cherche les matrices $Z \in M_2(\mathbb{Q})$ tels que $AZ = 0$.*

On pose $Z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *avec $a, b\, c\, d \in \mathbb{Q}$.*

Alors $AZ = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+2c & 4b+2d \end{bmatrix}$

$AZ = 0$ *équivaut alors à* $\begin{cases} 2a+c=0 \\ 2b+d=0 \\ 4a+2c=0 \\ 4b+2d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a+c=0 \\ 2b+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-2a \\ d=-2b \end{cases}$

a et b sont des variables libres.

Donc $S = \left\{ Z \in M_2(\mathbb{Q}),\ AZ = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$

4. *On cherche X, $Y \in M_2(\mathbb{Q})$ tels que $AX = AY$.*
$AX = AY$ *équivaut à* $A(X - Y) = 0$

Donc d'après 3., il existe $a, b \in \mathbb{Q}$, $X - Y = \begin{bmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{bmatrix}$ *càd* $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{bmatrix} + Y$

D'où $S = \left\{ (X, Y) \in (M_2(\mathbb{Q}))^2 \ ;\ AX = AY \right\}$

$$S = \left\{ \left(Y + \begin{bmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{bmatrix},\ Y \right);\ Y \in M_2(\mathbb{Q}) \right\}$$

$(a, b) \in \mathbb{Q}^2$