Espeto
Varenne

Exercice 7 feuille n°4

1) $S_1 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z + t = 0 \}$

On sait que $\mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel. Montrons que S_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- $0 = (0,0,0,0) \in S_1$ (élément neutre) donc $S_1 \neq \emptyset$
- montrons S_1 stable pour l'addition et la multiplication

Soit $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in S_1$ alors $u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

Soit $u' = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \in S_1$ alors $u'_1 - u'_2 + u'_3 + u'_4 = 0$

En faisant la somme, on obtient $(u_1 + u'_1) - (u_2 + u'_2) + (u_3 + u'_3) + (u_4 + u'_4) = 0$

~~soit~~ or $u + u' = (u_1 + u'_1, u_2 + u'_2, u_3 + u'_3, u_4 + u'_4)$

donc $u + u' \in S_1$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in S_1$ donc $u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0$

En multipliant cette équation par λ, on obtient :

$\lambda u_1 - \lambda u_2 + \lambda u_3 + \lambda u_4 = 0$ or $\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \lambda u_4)$

donc $\lambda u \in S_1$

S_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

De même pour $S_2 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \; x + 2y - 2z + 4t = 0 \}$.

- $0 = (0,0,0,0) \in S_2$ donc $S_2 \neq \emptyset$
- S_2 stable pour l'addition et la multiplication ?

soit $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in S_2$ alors $u_1 + 2u_2 - 2u_3 + 4u_4 = 0$

soit $u' = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \in S_2$ alors $u'_1 + 2u'_2 - 2u'_3 + 4u'_4 = 0$

en additionnant on obtient $(u_1 + u'_1) + 2(u_2 + u'_2) - 2(u_3 + u'_3) + 4(u_4 + u'_4) = 0$

~~soit~~ or $u + u' = (u_1 + u'_1, u_2 + u'_2, u_3 + u'_3, u_4 + u'_4)$

donc $u + u' \in S_2$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in S_2$ donc $v_1 + 2v_2 - 2v_3 + 4v_4 = 0$

En multipliant par λ, on a :

$\lambda v_1 + \lambda 2 v_2 - \lambda 2 v_3 + \lambda 4 v_4 = 0$

$\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3, \lambda v_4)$ donc $\lambda v \in S_2$

S_2 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Montrons que $S_1 \cap S_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

- $\left.\begin{array}{l} 0 \in S_1 \\ 0 \in S_2 \end{array}\right\}$ donc $0 \in S_1 \cap S_2$ donc $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

- soit $v \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow v \in S_1$ et $v \in S_2$

$v' \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow v' \in S_1$ et $v' \in S_2$

On en déduit : $v + v' \in S_1$ et $v + v' \in S_2$

(car S_1 et S_2 sont des espaces vectoriels et donc stable par l'addition

donc $v + v' \in S_1 \cap S_2$

$\left.\begin{array}{l} s \in S_1 \cap S_2 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda . s \in S_1 \\ \text{et} \\ \lambda s \in S_2 \end{array}\right.$ car $\lambda \in \mathbb{R}, s \in S_1 \Rightarrow \lambda s \in S_1$ car S_1 s.e.v. pour la m̂ raison

Donc $\lambda s \in S_1 \cap S_2$

Donc $S_1 \cap S$ est un s. e.v

2) (1) $x - y + z + t = 0$

y, z, t variables libres

$x = y - z - t$

donc $S_1 = \{(y - z - t, y, z, t) \; y, z, t \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{y(1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + t(-1,0,0,1) \; ; y, z, t \in \mathbb{R}^3\}$

Posons :

On peut aussi écrire : $S_1 = \{yu + zv + tw \quad (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$

donc $\{u, v, w\}$ est une base de S_1 car c'est une famille libre & génératrice de S_1

$u = (1,1,0,0) \quad v = (-1,0,1,0)$ et $w = (-1,0,0,1)$

(2) $x + 2y - 2z + 4t = 0$

y, z, t variables libres

$x = -2y + 2z - 4t$

donc $S_2 = \{ (-2y+2z-4t,\ y, z, t) \quad y, z, t \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \{ y(-2, 1, 0, 0) + z(2, 0, 1, 0) + t(-4, 0, 0, 1) \quad y, z, t \in \mathbb{R}^3 \}$

On peut aussi écrire : $S_2 = \{ y u' + z v' + t w' \quad (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \}$

donc $\{ u', v', w' \}$ est une base de S_2

où $u' = (-2, 1, 0, 0)$ $\quad v' = (2, 0, 1, 0)$ et $w' = (-4, 0, 0, 1)$

$$(3) \begin{cases} x - y + z + t = 0 & L_1 \\ x + 2y - 2z + 4t = 0 & L_2 \end{cases}$$

On triangule le système

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array} \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ \quad\quad 3y - 3z + 3t = 0 \end{cases}$$

z et t variables libres.

$$\begin{cases} y = z - t \\ x = -2t \end{cases}$$

donc $S_3 = \{ (-2t,\ z - t,\ z, t) \quad z, t \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ z(0, 1, 1, 0) + t(-2, -1, 0, 1) \quad z, t \in \mathbb{R}^2 \}$

On peut aussi écrire $S_3 = \{ z u'' + t v'' \quad (z, t) \in \mathbb{R}^2 \}$

donc $\{ u'', v'' \}$ est une base de S_3

où $u'' = (0, 1, 1, 0)$ $\quad v'' = (-2, -1, 0, 1)$