



Fluides.

B. Nkonga, ...

Univ. Bx 1/Ecole Matméca

Plan du cours (30H)

- INTRODUCTION ET RAPPELS (2H)
- QUELQUES LOIS DE CONSERVATION (LDC) EN MÉCANIQUE DES FLUIDES. (6H)
- LDC SCALAIRE : PROPRIÉTÉS ET APPROXIMATIONS (4H)
- LDC SCALAIRE : VOLUMES FINIS, SCHÉMA DE GODUNOV (4H)
- SYSTÈME DE LDC : PROPRIÉTÉS ET APPROXIMATIONS 1D(6H)
- SYSTÈME DE LDC 1D: PROBLÈME DE RIEMANN ET APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES(4H)
- SYSTÈME DE LDC MULTI-D: APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES (4H)
- SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN INCOMPRESSIBLES. (4H)
- RÉVISIONS (1H)



Quelques Lois de Conservation (LdC) en mécanique des fluides.

LdC en mécanique des fluides

La description du mouvement

formulation lagrangienne La description lagrangienne consiste à paramétrer le déplacement des points par rapport à un instant fixé t_0 .

$$\xi = \varphi(t, \alpha),$$

avec $\alpha = \varphi(0, \alpha)$ et $\alpha \in \Omega(t_0)$. (t, α) sont les variables de Lagrange, α définit les coordonnées lagrangiennes. Le domaine $\Omega(t)$ est alors décrit à chaque instant (t) par:

$$\Omega(t) = \left\{ \xi = \varphi(t, \alpha) \quad \text{Telque} \quad \alpha \in \Omega(t_0) \right\}$$

LdC en mécanique des fluides

La description du mouvement

formulation eulerienne La description eulerienne consiste à définir en chaque point de l'espace la vitesse du point de milieu $\Omega(t)$ qui s'y trouve.

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \varphi(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}} = \left. \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

Le domaine $\Omega(t)$ est alors décrit à chaque instant (t) par:

$$\Omega(t) = \left\{ \mathbf{x} \text{ Telque } \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} = \varphi(t, \boldsymbol{\alpha}) \text{ et } \boldsymbol{\alpha} \in \Omega(t_0) \right\}$$

principe de conservation

Forme intégralle:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}(x, t + \delta t) = \int_{\Omega} \mathbf{w}(x, t) - \int_t^{t+\delta t} \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \mathbf{n} + \int_t^{t+\delta t} \int_{\Omega} \dot{\omega}.$$

Forme différentielle

$$\partial_t \mathbf{w} + \nabla \cdot \mathbf{f} = \dot{\omega}$$

Fluides de Stokes homogènes et isotropes

Sans production volumique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p) = \mu \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \partial_t (\rho e) + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{u}) = \mu \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) + k \Delta T \end{array} \right. \quad (1)$$

où l'enthalpie spécifique h est donnée par $h = e + \frac{p}{\rho}$.

Et en plus, l'inégalité d'entropie:

$$\partial_t (\rho S) + \nabla \cdot \left(\rho S \mathbf{u} - k \frac{\nabla T}{T} \right) \geq 0 \quad (2)$$

Forme non conservative

Soit $\frac{D^*}{Dt} = \partial_t^* + \mathbf{u} \cdot \nabla^* .$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho \frac{D\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2}}{Dt} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p + \mu \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) + \nabla \cdot (k\nabla T) \end{array} \right.$$

$$\rho e = \rho \varepsilon + \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \longrightarrow \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{D\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2}}{Dt}$$

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + k \Delta T$$

avec $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,j} \tau_{i,j} \partial_j \mathbf{u}_i$

Forme non conservative

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + k \Delta T \end{array} \right.$$

Et en plus

$$\rho \frac{DS}{Dt} - \nabla \cdot \left(k \frac{\nabla T}{T} \right) \geq 0$$

Fluide bivariant: $\varepsilon = \varepsilon(\vartheta, S)$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \partial_S \varepsilon \frac{DS}{Dt} + \partial_{\vartheta} \varepsilon \frac{D\vartheta}{Dt} = \partial_S \varepsilon \frac{DS}{Dt} - \frac{\partial_{\vartheta} \varepsilon}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \partial_S \varepsilon \frac{DS}{Dt} + \partial_{\vartheta} \varepsilon \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{\rho}$$

$$\rho \partial_S \varepsilon \frac{DS}{Dt} + (\partial_{\vartheta} \varepsilon + p) \nabla \cdot \mathbf{u} = \mu \tau : \nabla \mathbf{u} + k \Delta T$$

Or $k \Delta T = T \nabla \cdot \left(k \frac{\nabla T}{T} \right) + \frac{k}{T} \nabla T \cdot \nabla T$

$$\rho \partial_S \varepsilon \frac{DS}{Dt} - T \nabla \cdot \left(k \frac{\nabla T}{T} \right) = -(\partial_{\vartheta} \varepsilon + p) \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \tau : \nabla \mathbf{u} + \frac{k}{T} \|\nabla T\|^2$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j} \tau_{i,j} \partial_j \mathbf{u}_i \\
&= \mu \sum_{i,j} (\partial_j \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_j) \partial_j \mathbf{u}_i + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \\
&= \mu \sum_{i,j} (\partial_j \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_j) \partial_i \mathbf{u}_j + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \\
&= \mu \sum_{i,j} \frac{(\partial_j \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_j)^2}{2} + \lambda \sum_{i,j} \partial_i \mathbf{u}_i \partial_j \mathbf{u}_j \\
&= \mu \sum_{i,j \neq i} \frac{(\partial_j \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_j)^2}{2} + \frac{2\mu}{3} \sum_{i,j} (\partial_i \mathbf{u}_i)^2 + \lambda \sum_{i,j} \partial_i \mathbf{u}_i \partial_j \mathbf{u}_j \\
&= \mu \sum_{i,j \neq i} \frac{(\partial_j \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_j)^2}{2} + \frac{2\mu}{3} \sum_{i,j} (\partial_i \mathbf{u}_i)^2 + \lambda \sum_{i,j} (\partial_j \mathbf{u}_j)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j} (\partial_i \mathbf{u}_i - \partial_j \mathbf{u}_j)^2 \\
&= \mu \sum_{i,j \neq i} \frac{(\partial_j \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_j)^2}{2} + \sum_{i,j} \left(\frac{2\mu + 3\lambda}{3} \right) (\partial_i \mathbf{u}_i)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j} (\partial_i \mathbf{u}_i - \partial_j \mathbf{u}_j)^2
\end{aligned}$$

Compatibilité avec l'inégalité d'entropie.

Si $\partial_S \varepsilon = T$, $\partial_\vartheta \varepsilon = -p$ et $2\mu + 3\lambda \geq 0$ alors

$$\boxed{\partial \varepsilon = T \partial S - p \partial \vartheta} \text{ et}$$

$$\rho \frac{DS}{Dt} - \nabla \cdot \left(k \frac{\nabla T}{T} \right) = \frac{\mu \tau : \nabla \mathbf{u} + \frac{k}{T} \|\nabla T\|^2}{T} \geq 0$$

croissance de l'entropie physique S ,

$$\rho \frac{Ds}{Dt} + \nabla \cdot \left(k \frac{\nabla T}{T} \right) = - \frac{\mu \tau : \nabla \mathbf{u} + \frac{k}{T} \|\nabla T\|^2}{T} \leq 0$$

décroissance de l'entropie mathématique $s = -S$.

Caractérisation des discontinuités

$$\partial_t \mathbf{W} + \nabla \cdot \mathbf{f} = \dot{\omega}$$

dans un domaine Ω . Supposons l'écoulement régulier dans ce domaine sauf sur une surface mobile notée $\mathcal{S}(t)$ qui sépare le domaine Ω en deux sous-domaines réguliers $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$.

$$\Omega = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t), \quad \mathcal{S}(t) = \partial\Omega_1(t) \cap \partial\Omega_2(t),$$

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1(t) \cup \partial\Omega_2(t) \setminus \mathcal{S}(t)$$

Caractérisation des discontinuités

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}(x, t + \delta t) = \int_{\Omega} \mathbf{w}(x, t) - \int_t^{t+\delta t} \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \mathbf{n} + \int_t^{t+\delta t} \int_{\Omega} \dot{\omega}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m(t+dt)} \mathbf{w}(x, t + \delta t) &= \int_{\Omega_m(t)} \mathbf{w}(x, t) - \int_t^{t+\delta t} \int_{\partial\Omega_m(t) \setminus \mathcal{S}(t)} \mathbf{f} \mathbf{n}. \\ &+ \int_t^{t+\delta t} \int_{\mathcal{S}(t)} (-\mathbf{f} \mathbf{n}_m + \mathbf{W} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{n}_m) + \int_t^{t+\delta t} \int_{\Omega_m(t)} \dot{\omega} \end{aligned}$$

D'où les relations Rankine-Hugoniot sur $\mathcal{S}(t)$:

$$(\mathbf{f}_1 \mathbf{n}_1 - \mathbf{f}_2 \mathbf{n}_1) = \sigma (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \implies [\mathbf{f} \mathbf{n}_1] = \sigma [\mathbf{w}]$$

avec $\sigma = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{n}_1$

Adimensionnement

$$\bar{x}, \quad \bar{t}, \quad \bar{\rho}, \quad \bar{u}, \quad \bar{p} = \bar{\rho} \bar{c}^2, \quad \bar{h} = \bar{e} = \bar{c}^2, \quad \bar{T}, \quad \bar{\mu}, \quad \bar{k}, \quad \bar{\tau} = \frac{\overline{\mu u}}{\bar{x}}$$

$$St = \frac{\bar{x}}{\bar{u} \bar{t}} \text{ le nombre de Strouhal.}$$

$$Ma = \frac{\bar{u}}{\bar{c}}, \text{ le nombre de Mach}$$

$$Re = \frac{\bar{x} \bar{\rho} \bar{u}}{\bar{\mu}}, \text{ le nombre de Reynolds}$$

$$Pr = \frac{\bar{\mu} \bar{c}^2}{\bar{k} \bar{T}} \text{ le nombre de Prandtl}$$

Adimensionnement

Forme conservative avec $\bar{\mu} = \mu$ et $\bar{k} = k$.

$$\left\{ \begin{array}{l} St \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \nabla_{\hat{x}} \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}) = 0 \\ St \frac{\partial \hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + \nabla_{\hat{x}} \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}}) + \frac{1}{Ma^2} \nabla_{\hat{x}} \hat{p} = \frac{1}{Re} \nabla_{\hat{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \\ St \frac{\partial \hat{\rho} \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \nabla_{\hat{x}} \cdot ((\hat{\rho} \hat{e} + \hat{p}) \hat{\mathbf{u}}) = \frac{Ma^2}{Re} \nabla_{\hat{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{Pr Re} \nabla_{\hat{x}} \cdot (\nabla_{\hat{x}} \hat{T}) \end{array} \right.$$

Forme non conservative

$$\left\{ \begin{array}{l} St \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\rho} = -\hat{\rho} \nabla_{\hat{x}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \\ St \hat{\rho} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho} \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}} = -\frac{1}{Ma^2} \nabla_{\hat{x}} \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla_{\hat{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \\ St \frac{\partial \hat{\rho} \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \nabla_{\hat{x}} \cdot ((\hat{\rho} \hat{e} + \hat{p}) \hat{\mathbf{u}}) = \frac{Ma^2}{Re} \nabla_{\hat{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{Pr Re} \nabla_{\hat{x}} \cdot (\hat{k} \nabla_{\hat{x}} \hat{T}) \end{array} \right. \quad \text{p.16}$$

Equations d'Euler

$$\mathcal{R}e \longrightarrow \infty$$

Forme conservative

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p) = 0 \\ \partial_t (\rho e) + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{u}) = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Forme non conservative

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p \\ \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{array} \right.$$

Faible Mach

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1 \mathcal{M}a + \hat{\rho}_2 \mathcal{M}a^2 + O(\mathcal{M}a^3),$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_1 \mathcal{M}a + \hat{\mathbf{u}}_2 \mathcal{M}a^2 + O(\mathcal{M}a^3),$$

$$\hat{p} = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 \mathcal{M}a + \hat{p}_2 \mathcal{M}a^2 + O(\mathcal{M}a^3),$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}_0 + \hat{\mathbf{e}}_1 \mathcal{M}a + \hat{\mathbf{e}}_2 \mathcal{M}a^2 + O(\mathcal{M}a^3),$$

Gaz parfaits: $\hat{p} = (\gamma - 1) \left(\hat{\rho} \hat{\mathbf{e}} + \frac{\mathcal{M}a^2}{2} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \right).$

$$\implies \hat{p}_0 = (\gamma - 1) \hat{\rho}_0 \hat{e}_0, \quad \hat{p}_1 = (\gamma - 1) (\hat{\rho}_0 \hat{e}_1 + \hat{\rho}_1 \hat{e}_0)$$

et $\hat{p}_2 = (\gamma - 1) \left(2\hat{\rho}_1 \hat{e}_1 + \hat{\rho}_0 \hat{e}_2 + \hat{\rho}_2 \hat{e}_0 + \frac{\hat{\rho}_0}{2} \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 \right)$

Fluides incompressibles

$$Re \longrightarrow \infty, \quad St = O(1), \quad Ma \longrightarrow 0,$$

$$O\left(\frac{1}{Ma^2}\right) : \quad \nabla \hat{p}_0 = 0 \implies \nabla(\hat{\rho}_0 \hat{e}_0) = 0.$$

$$O\left(\frac{1}{Ma}\right) : \quad \nabla \hat{p}_1 = 0$$

$$O(1) : \quad \partial_t \hat{\rho}_0 + \nabla \cdot (\hat{\rho}_0 \hat{\mathbf{u}}_0) = 0, \quad \hat{\rho}_0 \partial_t \hat{\mathbf{u}}_0 + \nabla_{\hat{x}} \cdot (\hat{\rho}_0 \hat{\mathbf{u}}_0 \otimes \hat{\mathbf{u}}_0) + \nabla \hat{p}_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{e}_0}{\partial \hat{t}} + \nabla_{\hat{x}} \cdot ((\hat{\rho}_0 \hat{e}_0 + \hat{p}_0) \hat{\mathbf{u}}_0) = 0$$

On suppose $\hat{p}_0 = Cte.$ et on trouve $\nabla_{\hat{x}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 = 0, \hat{\rho}_0 = Cte.$ et

$$\hat{\rho}_0 \partial_t \hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\rho}_0 \nabla_{\hat{x}} \cdot (\hat{\mathbf{u}}_0 \otimes \hat{\mathbf{u}}_0) + \nabla \hat{p}_2 = 0$$

Equations de l'acoustique

$$Re \longrightarrow \infty, \quad St = O\left(\frac{1}{Ma}\right), \quad Ma \longrightarrow 0,$$

$$O\left(\frac{1}{Ma^2}\right) : \quad \nabla \hat{p}_0 = 0 \longrightarrow \nabla(\hat{\rho}_0 \hat{e}_0) = 0.$$

$$O\left(\frac{1}{Ma}\right) : \quad \partial_t \hat{\rho}_0 = 0, \quad \partial_t \hat{\rho}_0 \hat{e}_0 = 0, \quad \partial_t \hat{\rho}_0 \hat{\mathbf{u}}_0 + \nabla \hat{p}_1 = 0$$

$$O(1) : \quad \partial_t \hat{\rho}_1 + \nabla \cdot (\hat{\rho}_0 \hat{\mathbf{u}}_0) = 0, \quad \partial_t (\hat{\rho}_0 \hat{e}_1 + \hat{\rho}_1 \hat{e}_0) + \frac{\hat{\rho}_0 c_0^2}{\gamma - 1} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 = 0,$$

or $\hat{\rho}_0 \partial_t (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_0) + \Delta \hat{p}_1 = 0$ et $\partial_t \hat{p}_1 + \hat{\rho}_0 c_0^2 \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 = 0$ soit

$$\partial_t^2 \hat{p}_1 - c_0^2 \Delta \hat{p}_1 = 0$$



LdC scalaire : Propriétés et Approximations.

Lois de Conservation scalaire 1D: Propriétés

Forme visqueuse:

$$\partial_t \mathbf{u}^\epsilon + \partial_x f(\mathbf{u}^\epsilon) = \epsilon \partial_x^2 \mathbf{u}^\epsilon \quad (4)$$

ϵ est un petit paramètre proportionnel au coefficient de viscosité.

Forme conservative non visqueuse:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x (f(\mathbf{u})) = 0 \quad (5)$$

Les solutions régulières de l'équation non visqueuse sont aussi solutions de l'équation sous forme non conservative:

$$\partial_t \mathbf{u} + f'(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

LdC Scalaire 1D: Courbes caractéristiques

Lorsque $\mathbf{u}(x, t)$ et $f(\mathbf{u})$ sont des fonctions régulières, les courbes caractéristiques sont définies par:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f' \left(\mathbf{u}(x(t), t) \right) \quad (7)$$

Proposition: Les courbes caractéristiques associées aux lois de conservation scalaire 1D sont des droites.

$$\frac{d\mathbf{u}(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{dx(t)}{dt} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f' \left(\mathbf{u}(x(t), t) \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

Par conséquent $\mathbf{u}(x(t), t) = \mathbf{u}(x(t_0), t_0) = \mathbf{u}_0(x(t_0))$

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0) f' \left(\mathbf{u}(x(t_0), t_0) \right)$$

Existence et unicité de solution régulières

Lorsque $\xi \longrightarrow f'(\mathbf{u}_0(\xi))$ est croissante avec $\mathbf{u}_0(\xi)$ régulière et bornée, il existe une unique solution régulière du problème de Cauchy définie par

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_0(\xi(x, t)) \quad \text{avec} \quad \xi(x, t) = x - t f'(\mathbf{u}_0(\xi(x, t)))$$

Existence OK. Soit $\mathcal{F}(\xi) = \xi - x + t f'(\mathbf{u}_0(\xi))$.

$$\frac{d}{d\xi} f'(\mathbf{u}_0(\xi(t))) > 0 \implies \mathcal{F}' = 1 + t \frac{d}{d\xi} f'(\mathbf{u}_0(\xi(t))) > 0$$

$$\mathcal{F}(-\infty) < 0, \quad \mathcal{F}(\infty) > 0, \implies \exists! \xi(x, t) \quad \mathcal{F}(\xi(x, t)) = 0$$

d'où l'unicité de $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_0(\xi(x, t))$.

Apparition de choc en temps fini

Soient \mathbf{u}_0 et f des fonctions régulières. Lorsque $\frac{d}{d\xi} f'(\mathbf{u}_0(\xi(t))) < 0$, il existe un temps $t^* = -\frac{1}{\frac{d}{d\xi} f'(\mathbf{u}_0(\xi(t)))}$ tel que la fonction $Y(t) = \partial_x \mathbf{u}(x(t), t)$ n'est plus bornée.

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \partial_x \partial_t \mathbf{u}(x(t), t) + \frac{dx(t)}{dt} \partial_x (\partial_x \mathbf{u}(x(t), t)) \\ &= -\partial_x (f'(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}) + f'(\mathbf{u}) \partial_x (\partial_x \mathbf{u}(x(t), t)) \\ &= -f''(\mathbf{u}(x(t), t)) Y^2 = -f''(\mathbf{u}_0(\xi)) Y^2\end{aligned}$$

$Y(t)$ vérifie l'équation de Riccati, par conséquent:

$$Y(t) = \frac{Y(0)}{1 + tY(0)f''(\mathbf{u}_0(\xi))} = \frac{Y(0)}{1 + t\frac{d}{d\xi} f'(\mathbf{u}_0(\xi(t)))}$$

Solutions faibles

Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x (f(\mathbf{u})) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0 \\ \mathbf{u}(x, t = 0) = \mathbf{u}_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (8)$$

Définition 0.1. \mathbf{u} est une solution faible du problème de Cauchy si elle vérifie les deux conditions suivantes:

- $\mathbf{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$.
- $\forall \phi(x, t)$ fonction régulière ($C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$) à support compact dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx (\mathbf{u} \partial_t \phi + f(\mathbf{u}) \partial_x \phi) = \int_{-\infty}^\infty dx u_0(x) \phi(x, 0)$$

Relation de Rankine-Hugoniot

Soit discontinuité simple entre deux états constants u_l et u_r séparés par une courbe de discontinuité $x = X(t)$

$$Q = [X(t) - \delta x, X(t) + \delta x] \times [t, t + \delta t]$$

avec $X(t+s) \in]X(t) - \delta x, X(t) + \delta x[$ pour $0 \leq s \leq \delta t$

Relation de Rankine-Hugoniot

L'équation de conservation dans ce volume est:

$$\int_{X(t)-\delta x}^{X(t+\delta t)} \mathbf{u}_l dx + \int_{X(t+\delta t)}^{X(t)+\delta x} \mathbf{u}_r dx = \int_{X(t)-\delta x}^{X(t)} \mathbf{u}_l dx + \int_{X(t)}^{X(t)+\delta x} \mathbf{u}_r dx - \int_t^{t+\delta t} f(\mathbf{u}_r) dt + \int_t^{t+\delta t} f(\mathbf{u}_l) dt$$

$$\frac{X(t + \delta t) - X(t)}{\delta t} (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_r) = f(\mathbf{u}_l) - f(\mathbf{u}_r) \quad \forall \delta t > 0$$

$$\delta t \rightarrow 0 \implies f(\mathbf{u}_r) - f(\mathbf{u}_l) = s(t) (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l) \quad (9)$$

où $s(t) = X'(t)$ est la vitesse de la discontinuité.

$$s(t) = s = \frac{f(\mathbf{u}_r) - f(\mathbf{u}_l)}{\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l}$$

Discontinuités de contact et Chocs

$$m = f(\mathbf{u}_r) - s\mathbf{u}_r = f(\mathbf{u}_l) - s\mathbf{u}_l$$

où m est le flux de “matière” qui traverse la discontinuité.

- $m = 0$: cas “linéairement dégénéré” et la discontinuité associée sera une **Discontinuité de Contact (DC)**.
- $m \neq 0$: cas “vraiment nonlinéaire” et la discontinuité associée sera un **Choc**.

Pour une équation linéaire

$$f(\mathbf{u}) = a\mathbf{u} \implies m = 0, \quad s = a$$

et on ne peut avoir que des discontinuités de contact.

Solutions faibles régulières par morceaux

Proposition 0.2. Soit \mathbf{u} une fonction C^1 par morceaux sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.
 \mathbf{u} est une solution faible du problème de Cauchy Si et seulement si

- $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$,
- Dans chaque région où \mathbf{u} est régulière elle satisfait l'équation de conservation (forme différentielle).
- Le long des courbes de discontinuité on a $[f(\mathbf{u})] = s(t) [\mathbf{u}]$

Importance du choix des quantités conservées.

Soient $\phi(\mathbf{u})$ et $\Psi(\mathbf{u})$ deux fonctions vérifiant la relation:

$$\phi'(\Psi(\mathbf{u})) = f'(\mathbf{u}).$$

et $v = \Psi(\mathbf{u})$. Si \mathbf{u} est solution régulière de (??) alors v vérifie l'équation de conservation suivante:

$$\partial_t v + \partial_x \phi(v) = 0$$

En général, les solutions faibles du problème de Cauchy ne sont pas solutions faibles de cette nouvelle équation: les relations de saut ne sont pas équivalentes.

exemple: équation de Burgers

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0$$

$$v = \Psi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^2 \text{ et } \phi(v) = \frac{2}{3} \mathbf{u}^3 = \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}}$$

$$\partial_t v + \partial_x (\phi(v)) = 0$$

Par contre

$$\frac{\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_l}{2} \neq \frac{2}{3} \frac{(\mathbf{u}_l^2 + \mathbf{u}_l \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r^2)}{\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r}$$

Les discontinuités n'ont donc pas les mêmes vitesses en fonction du choix des quantités conservées.

Non unicité des solutions faibles

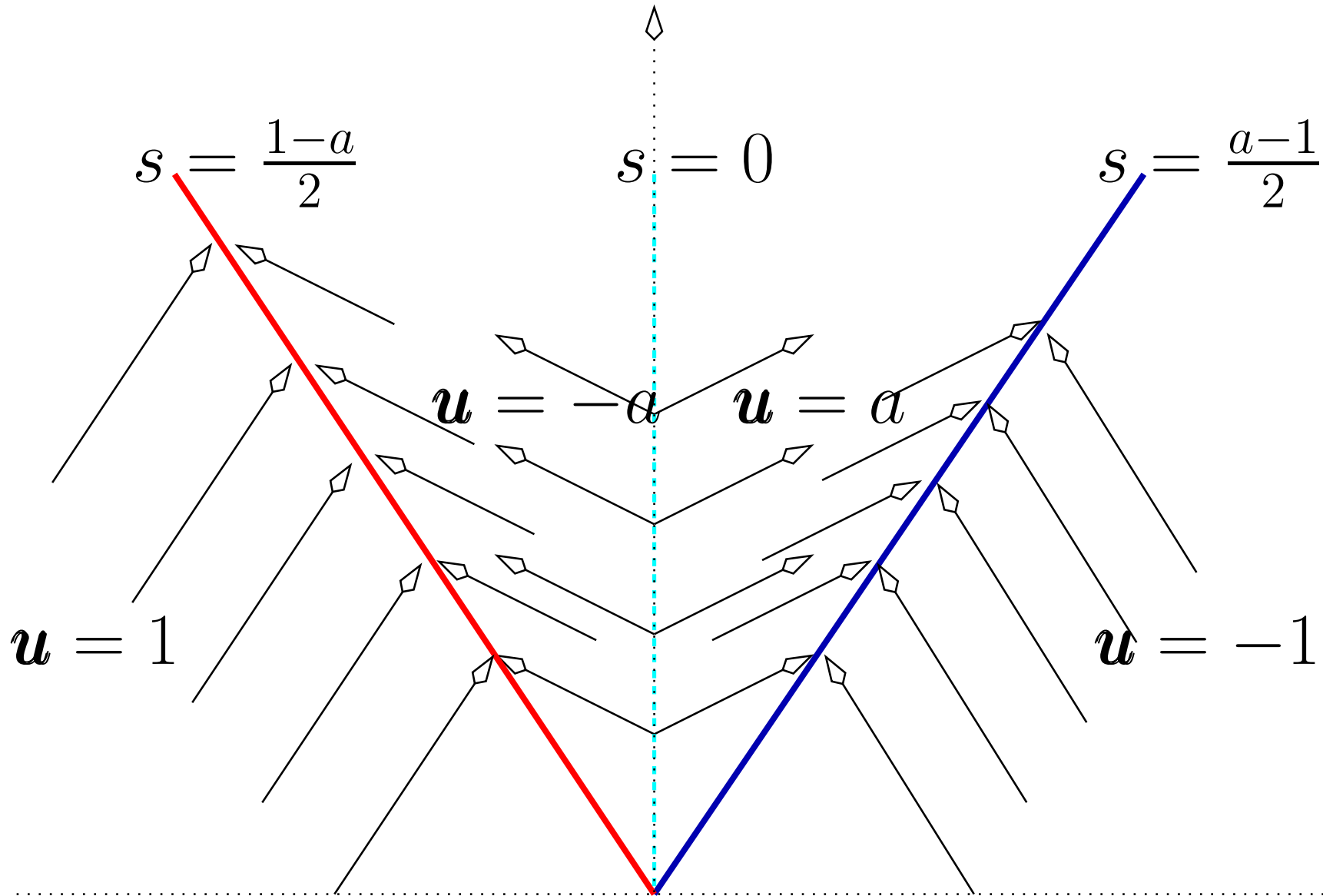
Considérons ici l'équation de Burgers: $\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0$.

Quelque soit $a \geq 1$ les solutions de la forme

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{1-a}{2} \\ -a & \text{si } \frac{1-a}{2} < \frac{x}{t} < 0 \\ a & \text{si } 0 < \frac{x}{t} < \frac{a-1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{a-1}{2} \end{cases}$$

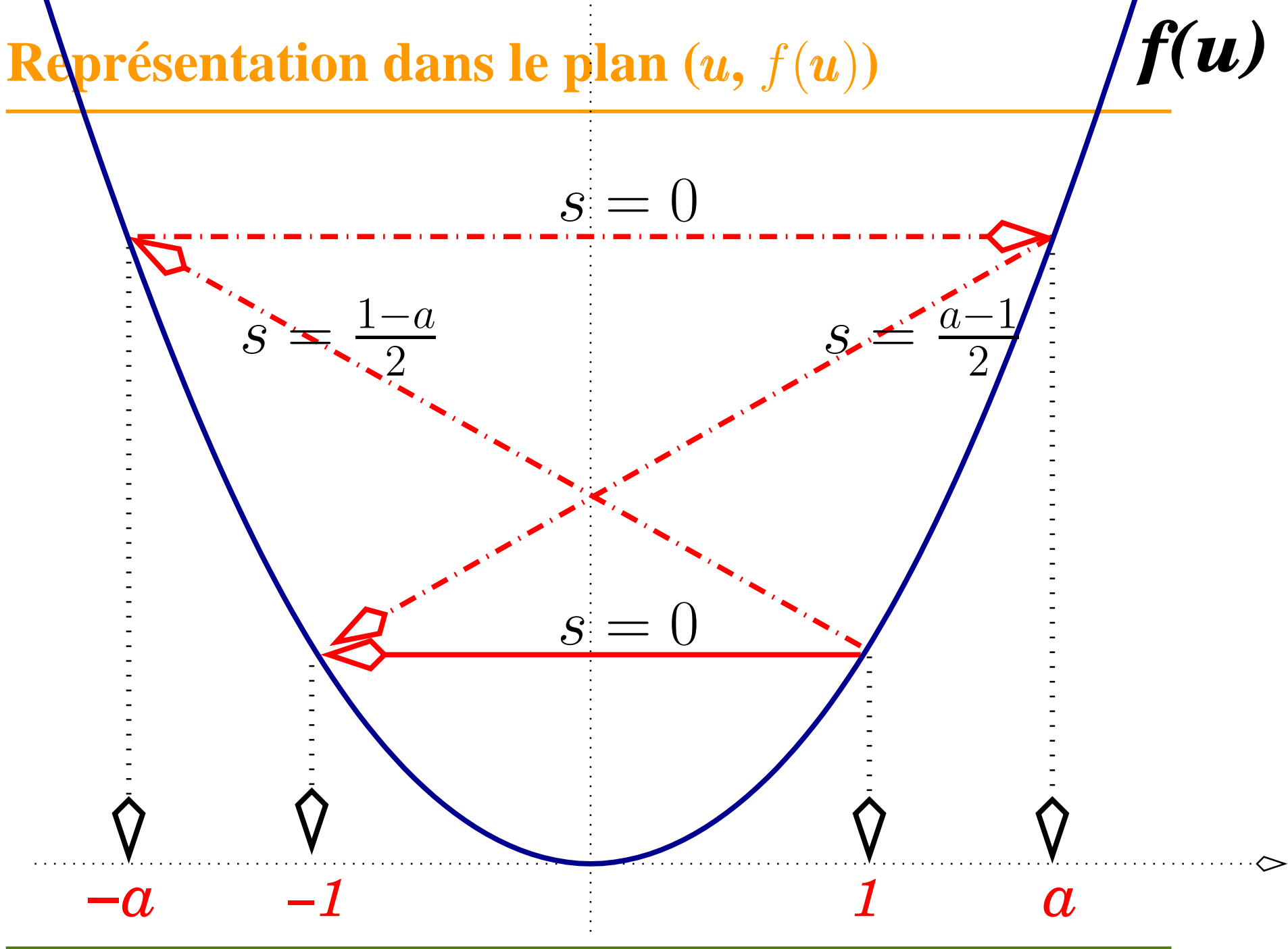
sont des solutions faibles pour le problème de caucy avec la donnée initiale $u_0(x) = 1$ si $x < 0$ et $u_0(x) = -1$ si $x > 0$

Représentation dans le plan (x,t)



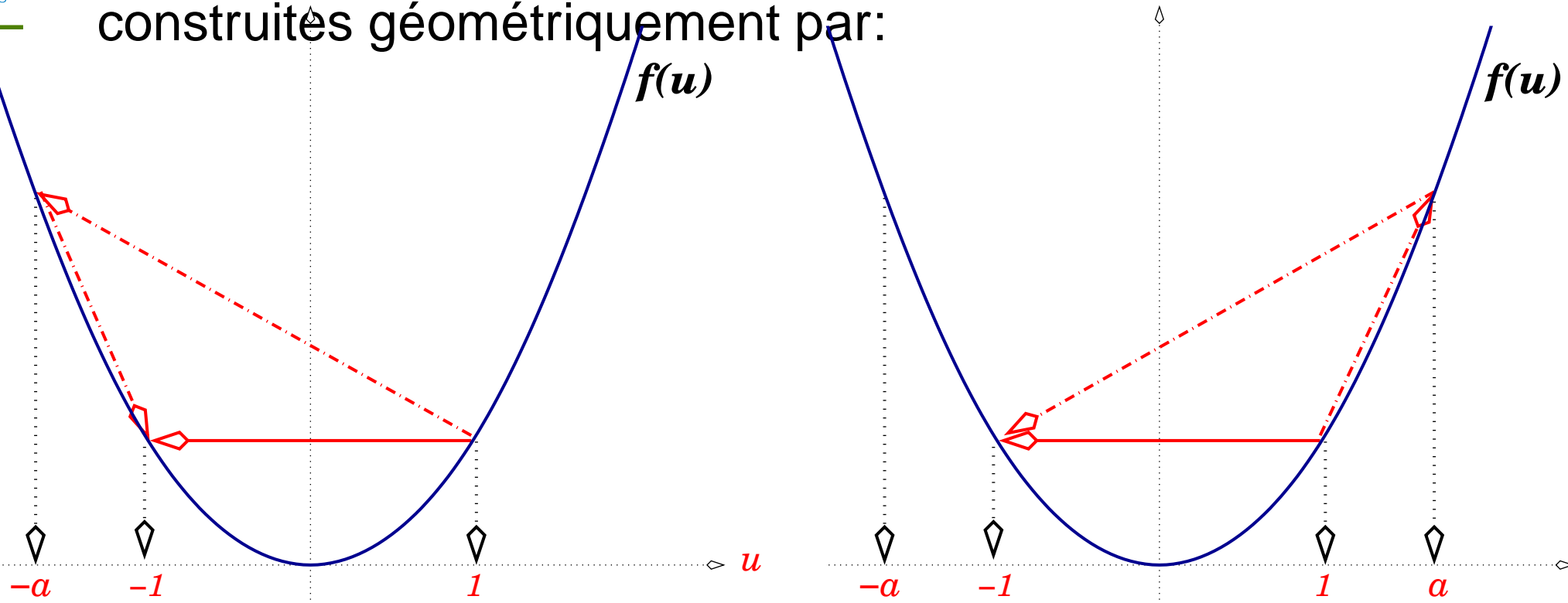
Représentation dans le plan $(u, f(u))$

$f(u)$



Contre exemples

Vérifier que les solutions de l'équation de Burgers construites géométriquement par:



ne sont pas des solutions faibles pour la donnée initiale:

$$u_l = 1 \text{ et } u_r = -1.$$

Couple entropie/flux d'entropie

Une fonction convexe $\eta(\mathbf{u})$ est une entropie de la loi de conservation si il existe un flux d'entropie $\Psi(\mathbf{u})$ tel que

$$\eta'(\mathbf{u})f'(\mathbf{u}) = \Psi'(\mathbf{u}) \quad pp. \quad (10)$$

Famille “d'entropie/flux d'entropie” de Krushkov,:

$$\eta(\mathbf{u}) = |\mathbf{u} - k|, \quad \Psi(\mathbf{u}) = \text{sgn}(\mathbf{u} - k) (f(\mathbf{u}) - f(k)) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

On vérifie que

$$\partial_t \eta(\mathbf{u}^\epsilon) + \partial_x \Psi(\mathbf{u}^\epsilon) = \epsilon \eta'(\mathbf{u}^\epsilon) \partial_x^2 \mathbf{u}^\epsilon$$

Conditions d'entropie

On souhaite que : $\mathbf{u} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}^\epsilon$

Theorem 0.3. *On suppose que $\forall \epsilon > 0$ la forme visqueuse admet une solution unique \mathbf{u}^ϵ régulière, qu'il existe $C > 0$ (indépendant de ϵ) tel que $\|\mathbf{u}^\epsilon\|_{L^\infty} < C$ et que la suite \mathbf{u}^ϵ converge vers \mathbf{u} presque partout. Alors \mathbf{u} est solution faible du problème de cauchy et, pour tout couple "entropie/flux d'entropie" (η, Ψ) , on a l'inégalité:*

$$\partial_t \eta(\mathbf{u}) + \partial_x \Psi(\mathbf{u}) \leq 0 \quad (11)$$

Une solution faible est dite **solution entropique** si pour tout couple "entropie/flux d'entropie" (η, Ψ) on a l'inégalité:

$$\partial_t \eta(\mathbf{u}) + \partial_x \Psi(\mathbf{u}) \leq 0 \quad (12)$$

Conditions d'entropie

Une discontinuité est admissible si, pour toute entropie convexe $\eta(\mathbf{u})$ et flux d'entropie associé $\Psi(\mathbf{u})$, on a l'inégalité d'entropie:

$$s \left(\eta(\mathbf{u}_r) - \eta(\mathbf{u}_l) \right) \geq \Psi(\mathbf{u}_r) - \Psi(\mathbf{u}_l) \quad (13)$$

Cas des entropies de Krushkov:

$$s [|\mathbf{u} - k|] \geq [sgn(\mathbf{u} - k) (f(\mathbf{u}) - f(k))] \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Conditions d'entropie: $u_l < u_r$

$$s(|u_r - k| - |u_l - k|) \geq \operatorname{sgn}(u_r - k) (f(u_r) - f(k)) \\ - \operatorname{sgn}(u_l - k) (f(u_l) - f(k))$$

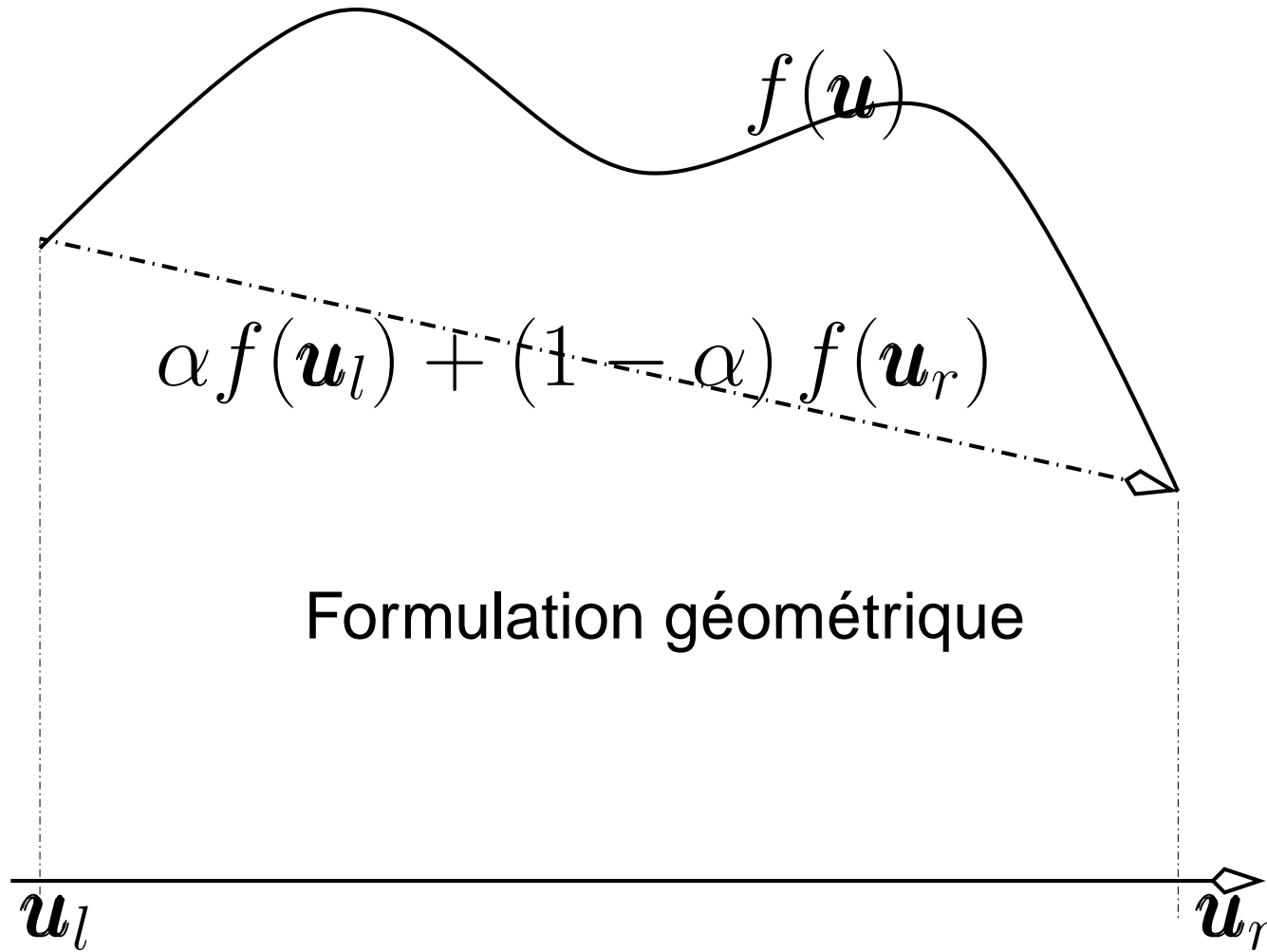
- si $k > u_r$ alors $s(-u_r + u_l) \geq -f(u_r) + f(u_l)$.
- si $k < u_l$ alors $s(u_r - u_l) \geq f(u_r) - f(u_l)$.
- si $u_l < k < u_r$ alors

$$s(u_r + u_l - 2k) \geq f(u_r) + f(u_l) - 2f(k).$$

Soit $k = \alpha u_l + (1 - \alpha)u_r$ avec $\alpha \in [0, 1]$:

$$f(\alpha u_l + (1 - \alpha)u_r) \geq (1 - \alpha) f(u_r) + \alpha f(u_l)$$

Condition d'entropie: $u_l < u_r$



Conditions d'entropie: $u_r > u_l$

$$s(|u_r - k| - |u_l - k|) \geq \operatorname{sgn}(u_r - k) (f(u_r) - f(k)) \\ - \operatorname{sgn}(u_l - k) (f(u_l) - f(k))$$

- si $k > u_l$ alors $s(-u_r + u_l) \geq -f(u_r) + f(u_l)$.
- si $k < u_l$ alors $s(u_r - u_l) \geq f(u_r) - f(u_l)$.
- si $u_r < k < u_l$ alors

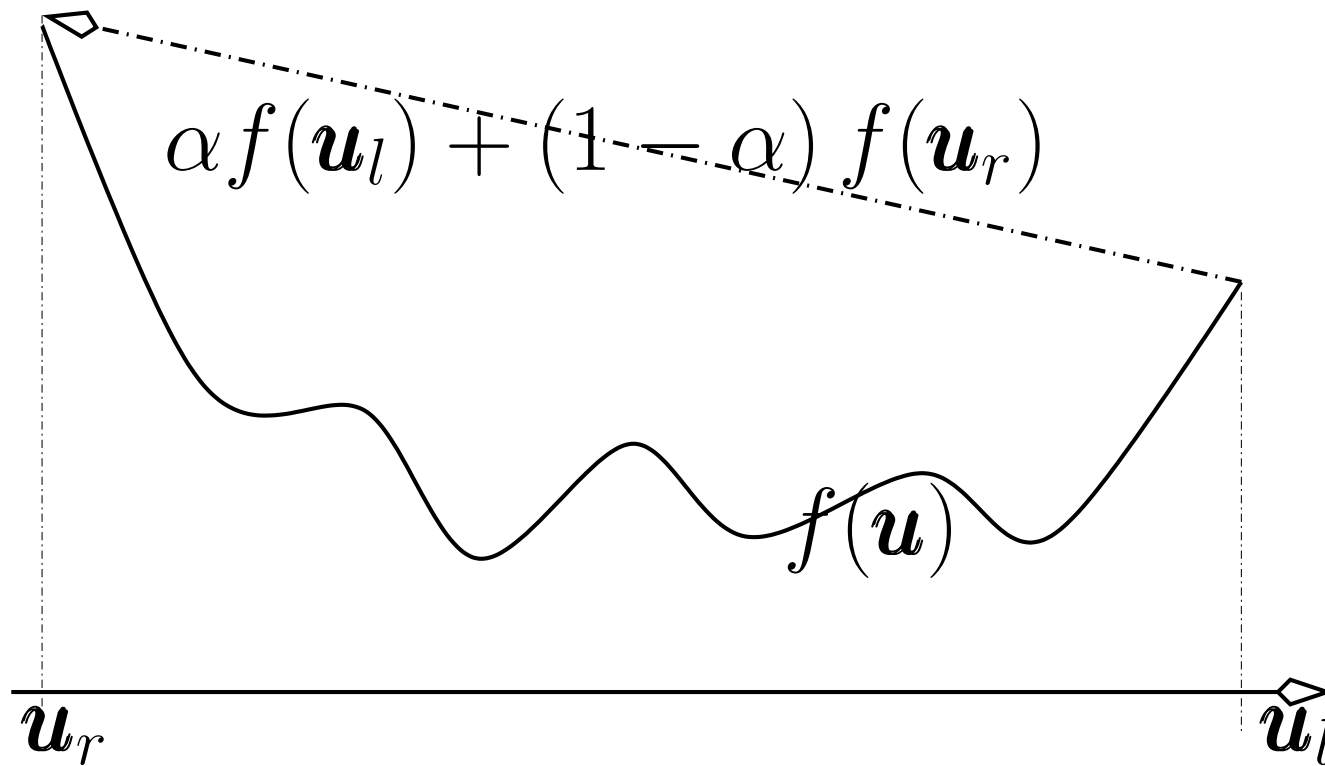
$$s(u_r + u_l - 2k) \leq f(u_r) + f(u_l) - 2f(k).$$

Soit $k = \alpha u_l + (1 - \alpha)u_r$ avec $\alpha \in [0, 1]$:

$$f(\alpha u_l + (1 - \alpha)u_r) \leq (1 - \alpha) f(u_r) + \alpha f(u_l)$$

Condition d'entropi: $u_r < u_l$

Formulation géométrique



Formes simplifiées

Condition de Choc :

$$f'(u_r) < s < f'(u_l)$$

Condition d'Olenik

$$\frac{f(u) - f(u_l)}{u - u_l} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r} \quad \forall u \text{ entre } u_l \text{ et } u_r.$$

La condition d'admissibilité des chocs se traduit aussi par:

- $u_l > u_r$ lorsque la fonction $f(u)$ est convexe,
- $u_l < u_r$ lorsque la fonction $f(u)$ est concave.

Unicité d'une solution entropique.

Theorem 0.4. Soit \mathbf{u} et v deux solutions faibles, de la loi de conservation, continuent par morceaux, vérifiant la condition d'entropie:

$$\forall t \geq 0 \quad \text{on a} \quad \|\mathbf{u}(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\mathbf{u}_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Theorem 0.5. Soit $\mathbf{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors, le problème de Cauchy admet une unique solution entropique $\mathbf{u}(x, t) \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}) \cap C^1(0, T; L^1(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$ et satisfait pour tout $t > 0$ la relation

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\mathbf{u}_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (14)$$

De plus, $\mathbf{u}(\cdot, t) \in BV(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$ et

$$TV(\mathbf{u}(\cdot, t)) \leq TV(\mathbf{u}_0(\cdot)) \quad (15)$$

Problème de Riemann

la donnée unitiale suivante:

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & \text{pour } x < 0 \\ \mathbf{u}_r & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

où \mathbf{u}_l et \mathbf{u}_r sont des constantes avec $\mathbf{u}_l \neq \mathbf{u}_r$.

Soit $\mathbf{u}(x, t)$ la solution du problème de Riemann, $\forall \alpha > 0$, $\mathbf{u}(x\alpha, t\alpha)$ est encore solution du problème de Riemann. Par conséquent $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(\xi)$ avec $\xi = \frac{x}{t}$.

On cherche ici à caractériser les solutions du problème de Riemann dans les intervalles $]\xi_m, \xi_{m+1}[$ où $\mathbf{u}(\xi)$ est régulière. Une telle solution vérifie pour $t > 0$ la relation:

$$\partial_t \mathbf{u} + f'(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0 \iff \frac{1}{t} \left(-\xi + f'(\mathbf{u}) \right) \partial_\xi \mathbf{u} = 0$$

Par conséquent,

- soit $\partial_\xi \mathbf{u} = 0$ et $\mathbf{u}(\xi)$ est localement constante,
- soit $\partial_\xi \mathbf{u} \neq 0$ et $\mathcal{F}(\xi, \mathbf{u}) = f'(\mathbf{u}(\xi)) - \xi = 0$.

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ alors

$$f''(\mathbf{u}(\xi)) \partial_\xi \mathbf{u} = 1.$$

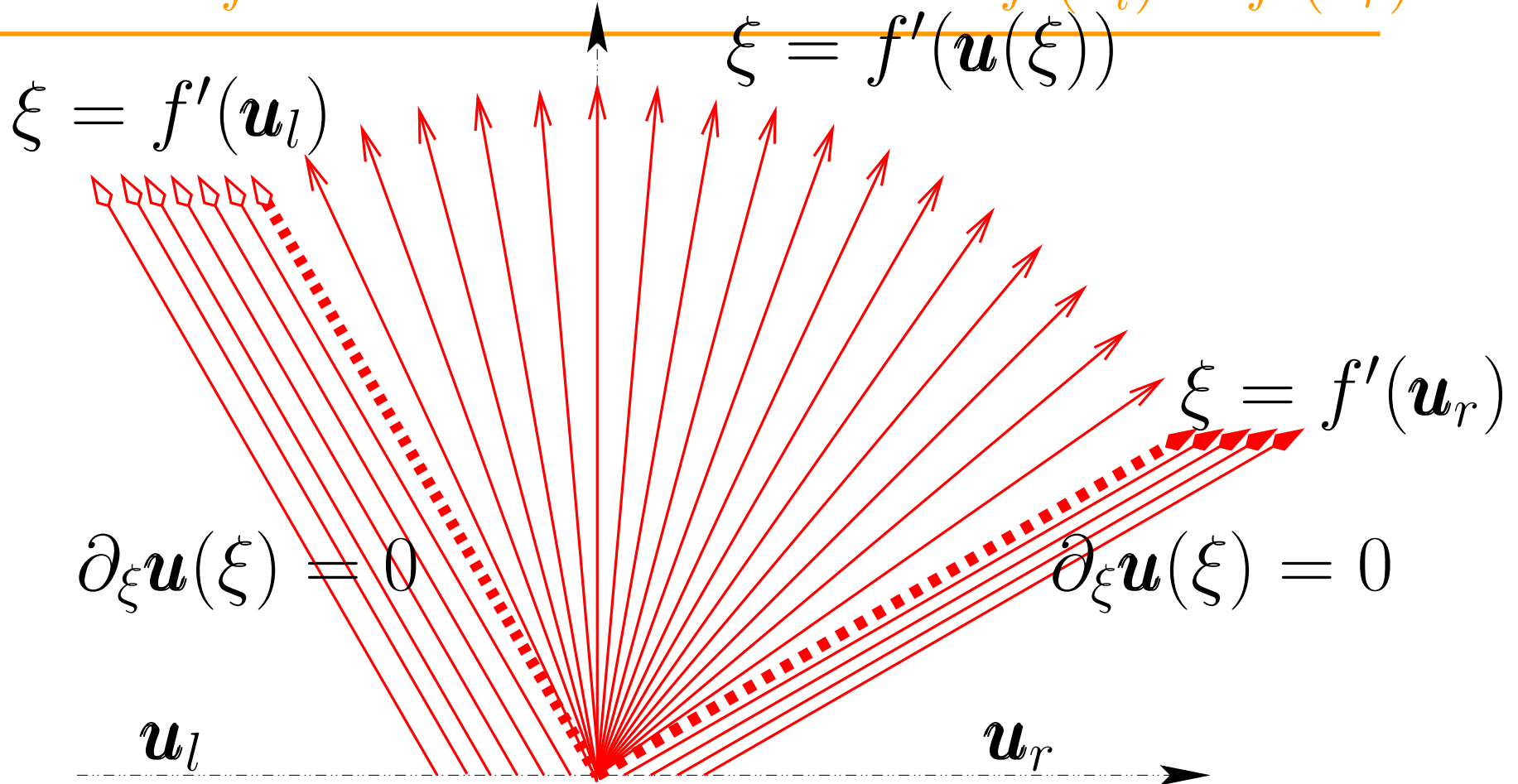
Détente

Cas f monotone: Soient $\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_m^+$ pour $\xi = \xi_m^+$ et
 $\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_{m+1}^-$ pour $\xi = \xi_{m+1}^-$.

$$\xi_m^+ \leq \xi < \zeta \leq \xi_{m+1}^- \implies f'(\mathbf{u}(\xi)) < f'(\mathbf{u}(\zeta)) \quad \forall \xi \forall \zeta$$

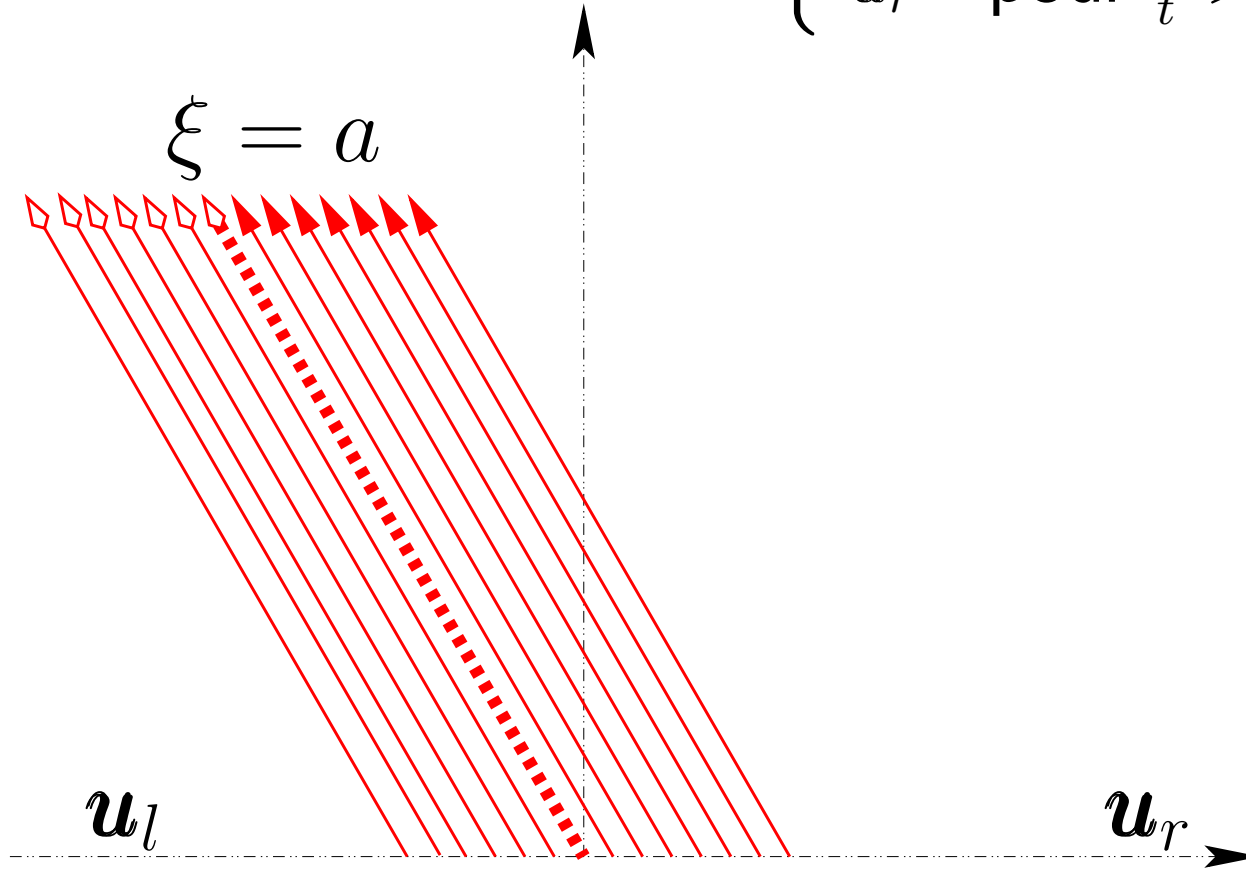
En particulier $f'(\mathbf{u}(\xi_m^+)) < f'(\mathbf{u}(\xi_{m+1}^-))$.

Détente: f nonlinéaire monotone et $f'(u_l) < f'(u_r)$.

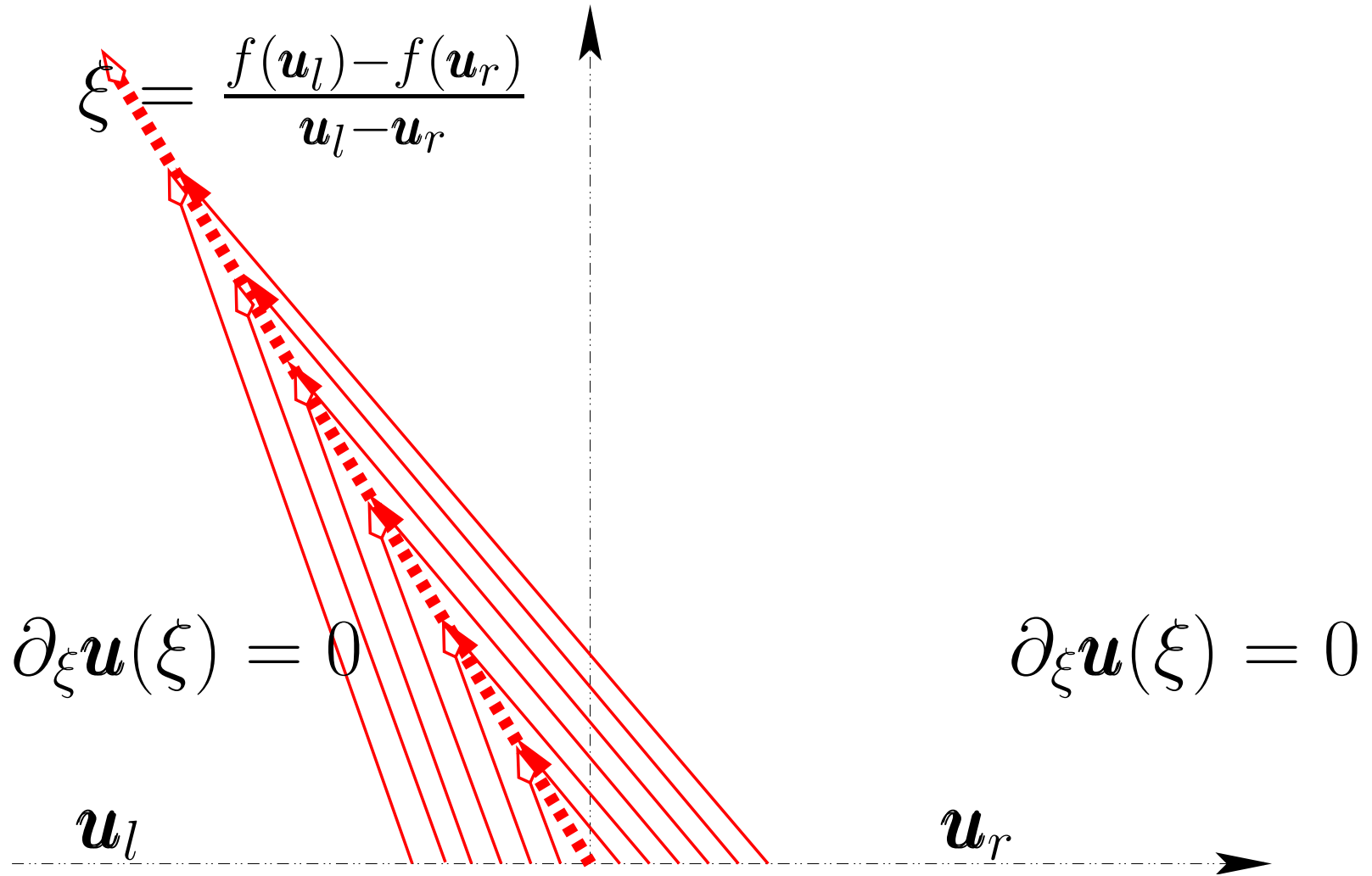


Discontinuité de contact: $f'(u_l) = f'(u_r) = a < 0$

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} u_l & \text{pour } \frac{x}{t} < a \\ u_r & \text{pour } \frac{x}{t} > a \end{cases}$$

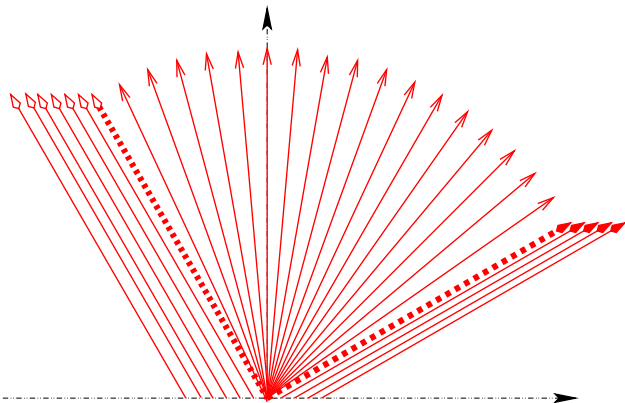


Choc : f nonlinéaire monotone et $f'(u_l) > f'(u_r)$.

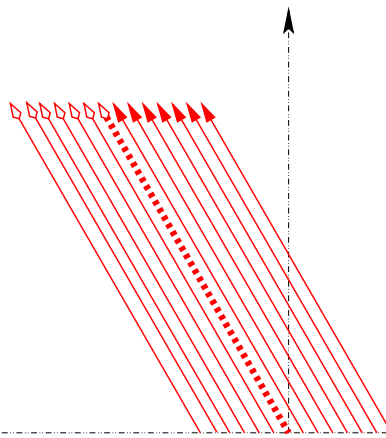


Solutions Ondes simples du Problème de Riemann

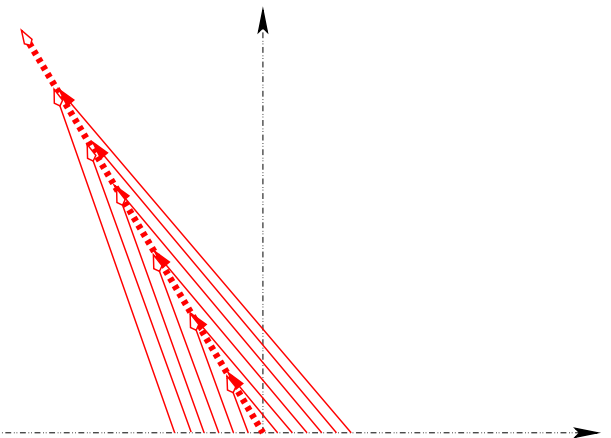
$$f'(u_l) < f'(u_r)$$



$$f'(u_l) = f'(u_r)$$



$$f'(u_l) > f'(u_r)$$



Quelques résultats

- La solution entropique du problème de Riemann est monotone et continue par morceaux.
- Dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux, la solution entropique du problème de Cauchy est unique.

Ondes composites: $u_g < u_r$

Le problème est de trouver les valeurs intermédiaires $v_m^- = u(\xi_m^-)$ et $v_m^+ = u(\xi_m^+)$, pour $m = 1, M$, tels que:

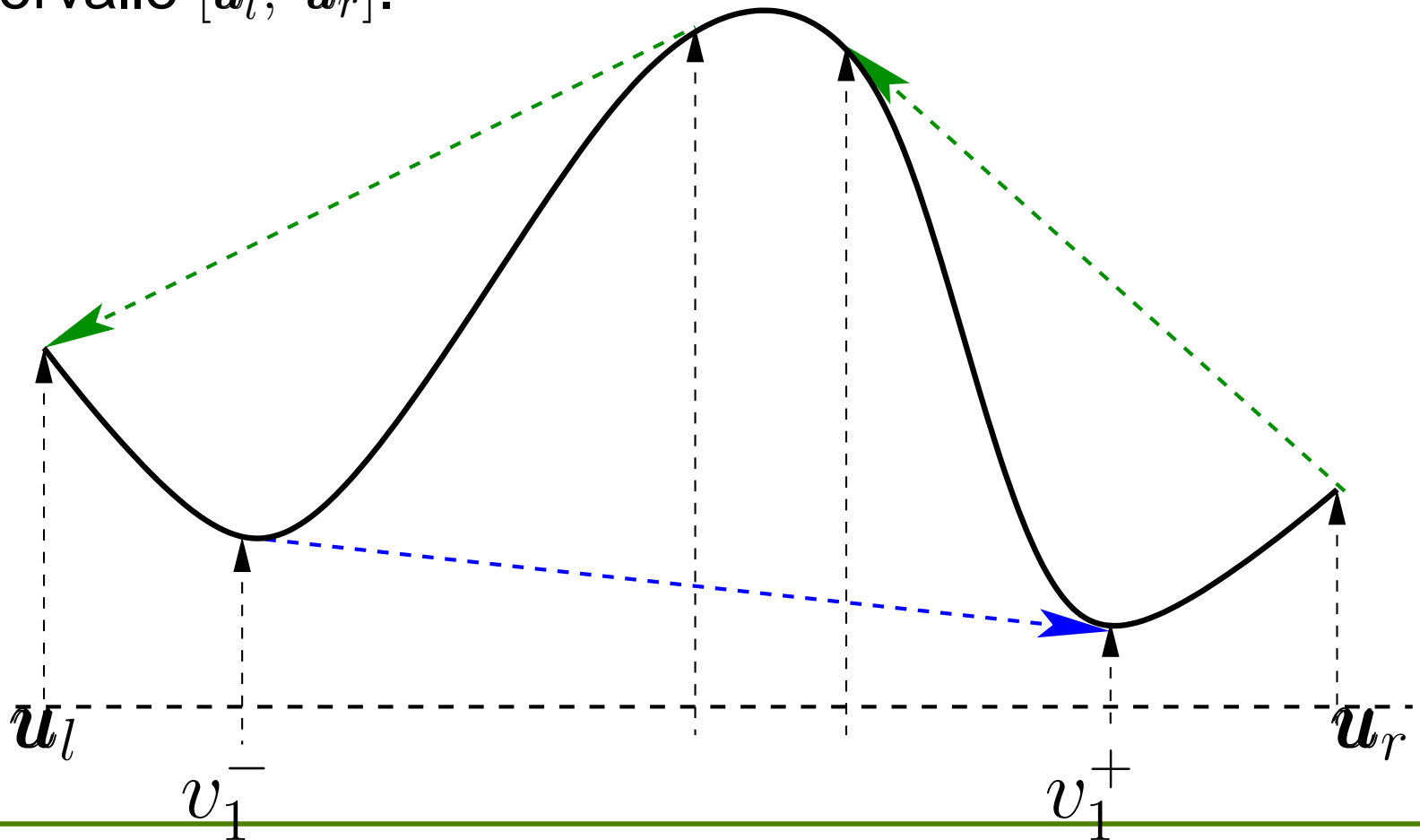
- $u(\xi)$ régulière sur $]\xi_m^+, \xi_{m+1}^-[$
- $u(\xi)$ discontinue aux points ξ_m .

La solution entropique est telle que

- $u_g < \dots u(\xi_m^-) < u(\xi_m^+) \dots < u_r$,
- $f(\alpha v_m^- + (1 - \alpha)v_m^+) \geq \alpha f(v_m^-) + (1 - \alpha) f(v_m^+)$
- sur $]\xi_m^+, \xi_{m+1}^-[$
 - soit $u(\xi)$ est constante,
 - soit $f'(u(\xi)) = \xi$.

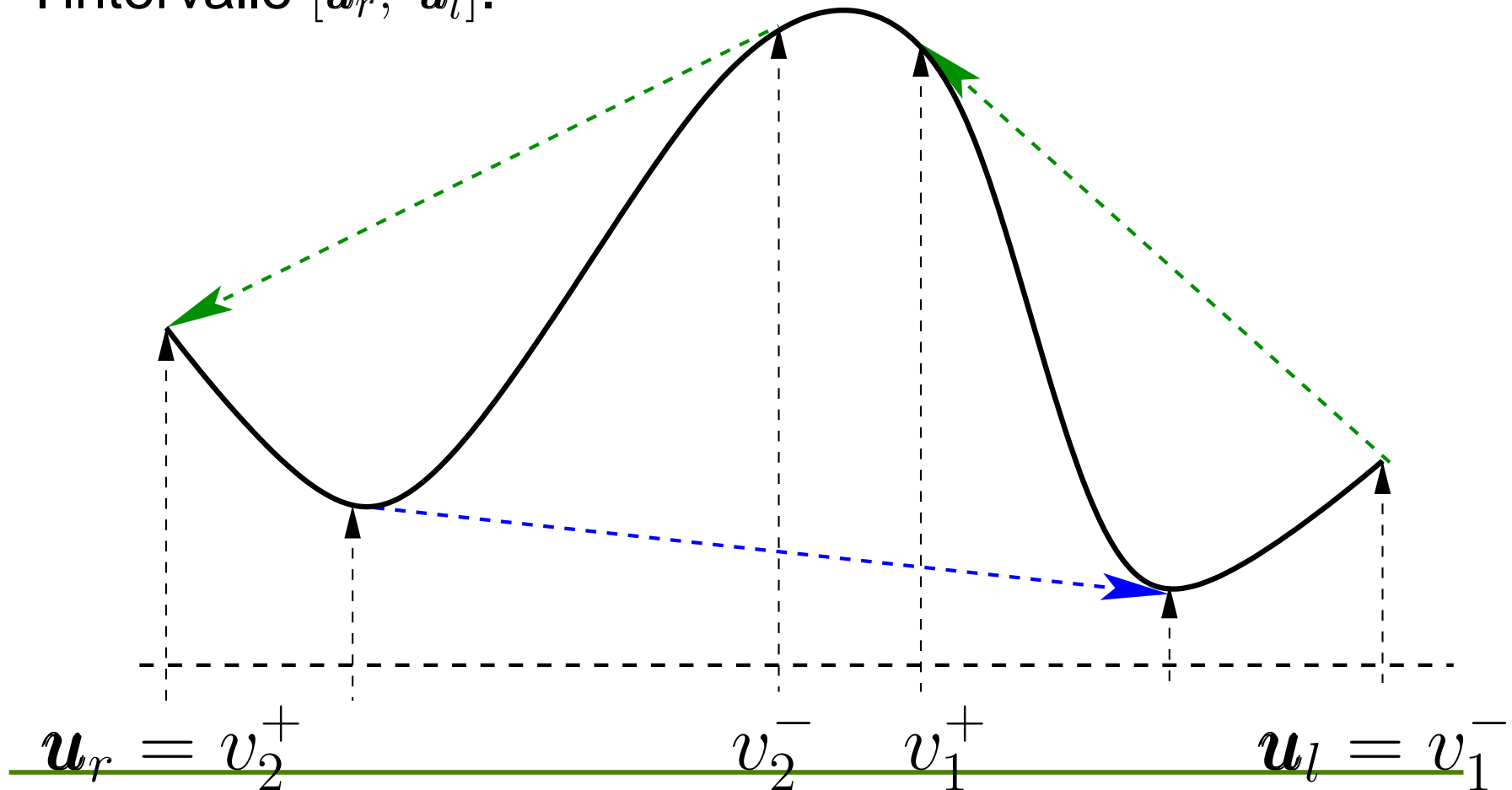
Solutions Ondes composites

La solution, proposée par A-Y. Le Roux, est obtenue en construisant l'enveloppe convexe de la restriction de f à l'intervalle $[u_l, u_r]$.

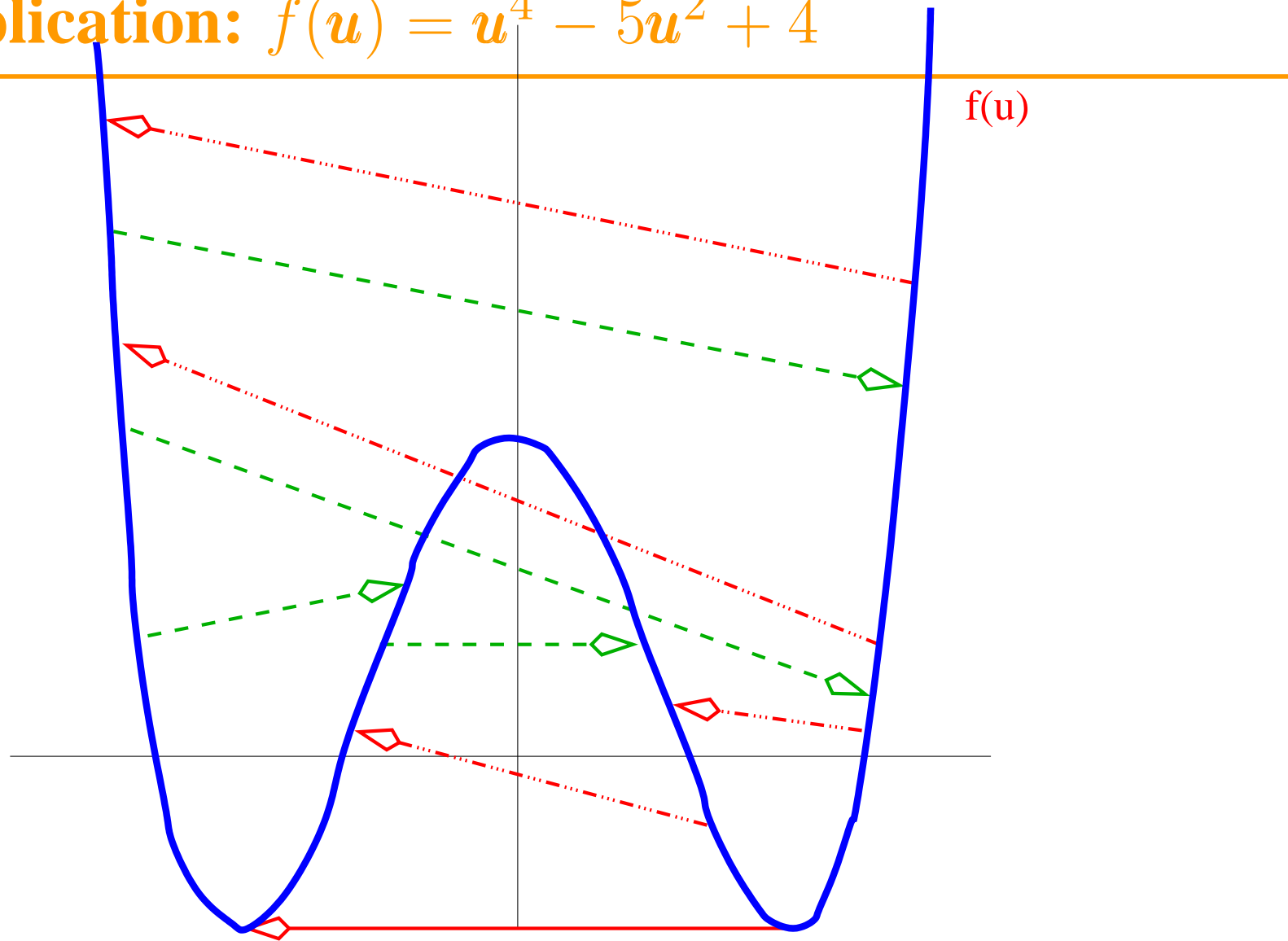


Ondes composites: $u_g > u_r$

La solution entropique, lorsque $u_g > u_r$, est obtenue en construisant l'enveloppe concave de la restriction de f à l'intervalle $[u_r, u_l]$.



Application: $f(u) = u^4 - 5u^2 + 4$



Applications

- Equation de Burger: $f(u) = u^2/2$
- Equation du trafic routier: $f(u) = \alpha u - \beta u^2$
- Modèle diphasique: $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2}$



LdC scalaire :

Volumes finis, Schéma de Godunov.

LdC 1D: Approximations Volumes finis

- Maillage structuré: $t^n = n\delta t$

$$x_j = j\delta x, \quad \mathcal{I}_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$$

- La solution approchée $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{u}_h(x, t)$ est définie par:

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_i^n \quad \forall (x, t) \in \mathcal{I}_i \times [t^n, t^{n+1}[,$$

$$\mathbf{v}(x, t^n) = \mathbf{v}^n = \sum_i \mathbf{v}_i^n \psi_i(x)$$

Un schéma numérique explicite à $p + q + 1$ points:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathcal{N}(\mathbf{v}^n)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathcal{N}_i(\mathbf{v}_{i-p}^n, \dots, \mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{i+q}^n) = \mathcal{N}_i(\mathbf{v}^n)$$

Propriétés recherchées pour un schéma numérique

- Erreur globale: $E^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n$
- Erreur de troncature: $e^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathcal{N}(\mathbf{u}^n)}{\delta h}$.
- La convergence vers la solution faible:

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \mathbf{u}_h = \mathbf{u} \iff \lim_{\delta h \rightarrow 0} \|E^{n+1}\| = 0.$$

- Consistance: $\lim_{\delta h \rightarrow 0} \|e^n\| = 0$.
- La stabilité L^1 , L^2 , L^∞ , BV suivant la norme:

$$\|\mathbf{v}^n\| \leq K(T)$$

$$\text{avec } \|\mathbf{v}^n\|_{BV} = \sum_i |\mathbf{v}_{i+1}^n - \mathbf{v}_i^n| \text{ et } T = n\delta h.$$

Consistance + Stabilité \implies Convergence.

$$E^{n+1} = \mathcal{N}(\mathbf{v}^n) - \mathbf{u}^{n+1} = \mathcal{N}(\mathbf{v}^n) - \mathcal{N}(\mathbf{u}^n) + \delta h e^n$$

- schéma contractant: $\|\mathcal{N}(\mathbf{v}^n) - \mathcal{N}(\mathbf{u}^n)\| \leq \|\mathbf{v}^n - \mathbf{u}^n\|$

$$\|E^{n+1}\| \leq \|E^n\| + \delta h \|e^n\| \leq \|E^0\| + T \|e\|$$

- généralisation: $\|\mathcal{N}(\mathbf{v}^n) - \mathcal{N}(\mathbf{u}^n)\| \leq (1 + \alpha \delta h) \|\mathbf{v}^n - \mathbf{u}^n\|$

$$\|E^{n+1}\| \leq \exp(\alpha T) (\|E^0\| + T \|e\|)$$

- schéma linéaire Stable: $\|\mathcal{N}(\mathbf{v})\| \leq (1 + \alpha \delta h) \|\mathbf{v}\|$

$$\|E^{n+1}\| \leq \|\mathcal{N}(E^n)\| + \delta h \|e^n\| \leq (1 + \alpha \delta h) \|E^n\| + \delta h \|e^n\|$$

Condition CFL.

Un schéma numérique ne peut converger que si son domaine de dépendance contient le domaine de dépendance de l'EDP:

$$\frac{\delta t}{\delta x} \max_{\mathbf{u}} (|\mathbf{f}'(\mathbf{u})|) \leq 1$$

Caractérisation des schémas numériques

- Schéma conservatif:

$$\mathcal{N} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} \right)$$

avec $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi \left(\mathbf{v}_{i-p+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{i+q}^n \right)$ et ϕ localement lipschitzienne par rapport à ses $p + q$ arguments. Flux explicite $m = n$, flux implicite $m = n + 1$.

- La précision d'ordre m :

$$\|\mathbf{u}_h(\cdot, t) - \mathbf{u}(\cdot, t)\| = O(\delta h^m) \iff \lim_{\delta h \rightarrow 0} \left\| \frac{E^{n+1}}{\delta h^m} \right\| = Cte.$$

- L'ordre du schéma numérique (spatial l , temporel s):

$$\mathbf{u}(x_i, t^{n+1}) - \mathbf{v}_i^{n+1} = O(\delta t^{s+1}) + O(\delta x^{l+1}), \quad m = \min(s, l)_{\text{MM3 - p.64}}$$

Caractérisation des schémas numériques

- Un schéma est dit monotone si $\mathcal{N} \left(\mathbf{u}_{i-p}^n, \dots, \mathbf{u}_{i+q}^n \right)$ est une fonction croissante de chacun de ses arguments.
- Un schéma est dit TVD (Total Variation Disminishing) si:

$$\|\mathbf{u}_h(\cdot, t^{n+1})\|_{BV} \leq \|\mathbf{u}_h(\cdot, t^n)\|_{BV}$$

TVD implique la stabilité BV.

- Un schéma conservatif est consistant si

$$\phi(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Caractérisation des schémas numériques

- un schéma numérique conservatif est consistant avec l'entropie η , si il existe un flux numérique $\Psi_{i+\frac{1}{2}}$ localement lipchitzien,

$$\Psi_{i+\frac{1}{2}} = \Psi(\mathbf{u}_{i-p}, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_{i+q}),$$

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(\eta(\mathbf{u}), \dots, \eta(\mathbf{u}), \eta(\mathbf{u}), \dots, \eta(\mathbf{u})) = \Psi(\eta) \\ \eta(\mathbf{u}_i^{n+1}) - \eta(\mathbf{u}_i^n) + \frac{\delta t}{\delta x} \left(\Psi_{i+\frac{1}{2}} - \Psi_{i-\frac{1}{2}} \right) \leq 0 \end{array} \right.$$

Caractérisation des schémas numériques

- Un schéma numérique est entropique si il est consistant avec toutes les entropies du problème.

Caractérisation des schémas numériques

$$\Delta \mathbf{u}_m^n = \mathbf{u}_{m+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{u}_{m-\frac{1}{2}}^n$$

- Un schéma conservatif se met sous la forme incrémentale:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \mathcal{C}_{i-\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^n + \mathcal{D}_{i+\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^n$$

où $\mathcal{C}_{i-\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{D}_{i+\frac{1}{2}}$ sont les coefficients incrémentaux.

- Un schéma conservatif se met sous la forme “viscosité numérique”:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\delta t}{2\delta x} (\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n)) + \frac{1}{2} \Delta (\mathcal{Q}_i \Delta \mathbf{u}_i^n)$$

$$\text{où } \Delta (\mathcal{Q}_i \Delta \mathbf{u}_i^n) = \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{Q}_{i-\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^n$$

Caractérisation des schémas numériques

- Un schéma conservatif consistant est TVD si les viscosités $Q_{i+\frac{1}{2}}$ vérifient:

$$\lambda \left| \frac{\Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^n} \right| \leq Q_{i+\frac{1}{2}} \leq 1$$

Cette condition est ncessaire pour les schémas à trois points.

- Un schéma conservatif consistant est TVD et L^∞ stable si les viscosités $Q_{i+\frac{1}{2}}$ vérifient:

$$\lambda \left| \frac{\Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^n} \right| \leq Q_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

●

Theorem 0.6. de Lax-Wendroff: Soit $\mathbf{u}_h(x, t)$ la solution approchée de \mathbf{u} , obtenue par un schéma conservatif consistant. Si $\mathbf{u}_h(x, t) \rightharpoonup \mathbf{u}_*(x, t)$ pp. dans $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, en restant borné dans L^∞ , uniformément % à t , alors $\mathbf{u}_*(x, t)$ est solution faible. Si de plus, le schéma est entropique alors $\mathbf{u}_*(x, t)$ est solution faible entropique du système.

●

Theorem 0.7. convergence: Soit \mathbf{u}_h solution approchée par un schéma conservatif, stable dans $L^\infty \cap BV$. Alors, $\forall T$, $\mathbf{u}_h \rightarrow \mathbf{u}$ dans $L^\infty(0 : T; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ avec \mathbf{u} solution faible. Si de plus, le schéma est entropique alors \mathbf{u} est solution faible entropique du système.

Schémas Conservatif Consistant Monotone (CCM)

$$\frac{\partial \mathcal{N}_i(\mathbf{v})}{\partial v_j} \geq 0 \quad \forall i, j$$

- Un schéma CCM est entropique.
- Un schéma CCM est L1-contractant:
$$\|\mathbf{v}_i^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}_i^{n+1}\|_1 < \|\mathbf{v}_i^n - \tilde{\mathbf{v}}_i^n\|_1$$
- Un schéma CCM est TVD: $\|\mathbf{v}^{n+1}\|_{BV} \leq \|\mathbf{v}^n\|_{BV}$.
- Les schémas TVD préservent la monotonie:
si $\mathbf{u}_h(\cdot, t^n)$ est monotone en espace,
alors $\mathbf{u}_h(\cdot, t^{n+1})$ est aussi monotone.
- Un schéma CCM est au plus du premier ordre.

Schémas à trois points: Lax-Friedrichs

$$v_i^{n+1} = \frac{v_{i-1}^n + v_{i+1}^n}{2} - \frac{\lambda}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

- Flux numérique : $\phi^{LF}(v_i, v_{i+1}) = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} + \frac{v_i - v_{i+1}}{2\lambda}$
- Diffusion numérique: $Q_{i+\frac{1}{2}}^{LF} = 1.$
- Condition CFL:

$$\frac{\delta t}{\delta x} \max_{\mathbf{u}} (|\mathbf{f}'(\mathbf{u})|) \leq 1.$$

- Schéma conservatif, consistant, monotone.

Schémas à trois points: Murman-Roe

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+1} &= \mathbf{v}_i^n - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{f}_{i+1}^n - \mathbf{f}_{i-1}^n) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \left(|\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n| (\mathbf{v}_{i+1}^n - \mathbf{v}_i^n) - |\mathcal{A}_{i-\frac{1}{2}}^n| (\mathbf{v}_i^n - \mathbf{v}_{i-1}^n) \right) \end{aligned}$$

avec $\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{A}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) = |\Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}| / |\Delta \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}|$

- Flux Numérique :

$$\phi^{MR}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_{i+1}^n + \mathbf{f}_i^n + |\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n| (\mathbf{v}_{i+1}^n - \mathbf{v}_i^n) \right)$$

- Viscosité : $Q_{i+\frac{1}{2}}^{MR} = \lambda |\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n| = \lambda \left| \frac{\Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}^n} \right|$
 - Schéma conservatif, consistant, TDV, pas monotone, Ordre 1.
-

Schémas à trois points: Lax-Wendroff

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+1} = & \mathbf{v}_i^n - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{f}_{i+1}^n - \mathbf{f}_{i-1}^n) \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \left(\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n (\mathbf{f}_{i+1}^n - \mathbf{f}_i^n) - \mathcal{A}_{i-\frac{1}{2}}^n (\mathbf{f}_i^n - \mathbf{f}_{i-1}^n) \right) \end{aligned}$$

- Flux Numérique :

$$\phi^{LW}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_{i+1}^n + \mathbf{f}_i^n - \lambda \mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n (\mathbf{f}_{i+1}^n - \mathbf{f}_i^n) \right)$$

- Viscosité : $Q_{i+\frac{1}{2}}^{LW} = \lambda^2 |\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n|^2 = \lambda^2 \left| \frac{\Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}^n} \right|^2$
- Schéma conservatif, consistant, pas TDV, pas monotone, Ordre 2.

Schéma à trois points: Godunov

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+1} &= \frac{1}{\delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{U}^h(x, t^{n+1}) dx \\ &= \frac{1}{\delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \mathcal{U} \left(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n, \xi_{i-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\delta x} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{U} \left(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n, \xi_{i+\frac{1}{2}} \right) dx \end{aligned}$$

$\mathcal{U}(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_r, \xi)$ est la solution entropique du problème de Riemann, et $\xi_m = \xi_m(x) = \frac{x-x_m}{t^{n+1}-t^n}$.

$$\mathcal{U}^h(x, t) = \mathcal{U} \left(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n, \xi_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad \text{pour} \quad \frac{\delta t}{\delta x} \max_{\mathbf{u}} (|\mathbf{f}'(\mathbf{u})|) \leq 1,$$

$$t^n \leq t < t^{n+1} \quad \text{et} \quad \xi_{i-\frac{1}{2}}(x_{i-1}) \leq \xi_{i-\frac{1}{2}}(x) \leq \xi_{i-\frac{1}{2}}(x_i)$$

Schéma à trois points: Godunov

$$\partial_t \mathcal{U}^h + \partial_x f(\mathcal{U}^h) = 0, \quad \text{et} \quad \partial_t \eta(\mathcal{U}^h) + \partial_x \Psi(\mathcal{U}^h) \leq 0.$$

\mathcal{U}^h est monotone.

Flux Numérique: $\phi^G(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) = f\left(\mathcal{U}_{i+\frac{1}{2}}\right)$ avec

$$\mathcal{U}_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{U}\left(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n, \xi_{i+\frac{1}{2}}(x_{i+\frac{1}{2}})\right)$$

Flux d'entropie: $\Psi\left(\mathcal{U}_{i+\frac{1}{2}}\right)$.

Schéma conservatif consistant monotone
donc TVD, positif, entropique, préserve la monotonie
mais d'ordre un.

Limiteur de flux

- Les Fluctuations:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^+ = \mathbf{f}_{i+1} - \phi_{i+\frac{1}{2}}^{LF}, \quad \Phi_{i+\frac{1}{2}}^- = \phi_{i+\frac{1}{2}}^{LF} - \mathbf{f}_i, \quad \Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{i+\frac{1}{2}}^+ + \phi_{i+\frac{1}{2}}^-$$

- On a : $\lambda \mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mu_{i+\frac{1}{2}}^+ + \mu_{i+\frac{1}{2}}^-$ avec $\mu_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \lambda \Phi_{i+\frac{1}{2}}^\pm / \Delta \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}$.

- Pour un flux décentré, l'une des fluctuations ($\Phi_{i+\frac{1}{2}}^-$ ou $\Phi_{i+\frac{1}{2}}^+$) est "nulle". On a alors:

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} &= (\mu_{i+\frac{1}{2}}^+ + \mu_{i+\frac{1}{2}}^-) (\Phi_{i+\frac{1}{2}}^+ + \Phi_{i+\frac{1}{2}}^-) \\ &\simeq \mu_{i+\frac{1}{2}}^+ \Phi_{i+\frac{1}{2}}^+ + \mu_{i+\frac{1}{2}}^- \Phi_{i+\frac{1}{2}}^- \end{aligned}$$

Limiteur de flux

Le Flux de Lax-Wendrof s'écrit:

$$\begin{aligned}\phi_{i+\frac{1}{2}}^{LW} - \mathbf{f}_i^n &= \frac{1}{2} \left(\Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} - \lambda \mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \Phi_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2} \left(\Phi_{i+\frac{1}{2}}^+ - \Phi_{i+\frac{1}{2}}^- - \lambda \mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \phi^{LW}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) = \phi^{LF}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^+}{2} \Phi_{i+\frac{1}{2}}^+ - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^-}{2} \Phi_{i+\frac{1}{2}}^-$$

$$\text{avec } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^+ = 1 - \mu_{i+\frac{1}{2}}^+ \text{ et } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^- = 1 + \mu_{i+\frac{1}{2}}^-.$$

Flux Hybride limité:

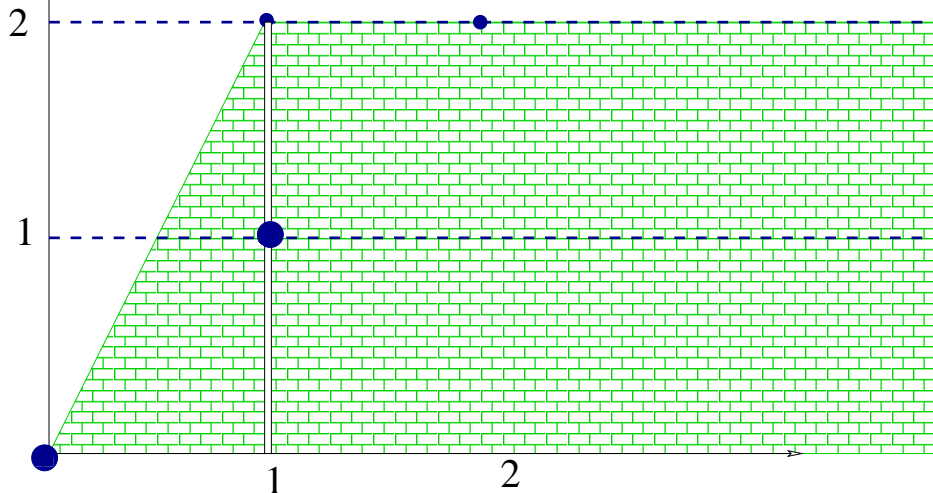
$$\phi^H(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) = \phi_{i+\frac{1}{2}}^{LF} + \varphi(r_{i+\frac{1}{2}}^+) \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^+}{2} \Phi_{i+\frac{1}{2}}^+ - \varphi(r_{i+\frac{1}{2}}^-) \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^-}{2} \Phi_{i+\frac{1}{2}}^-$$

Limiteur de flux

Soient $r_m^+ = \frac{\alpha_{m-1}^+ \Phi_{m-1}^+}{\Phi_m^+ \alpha_m^+}$, $r_m^- = \frac{\alpha_{m+1}^- \Phi_{m+1}^-}{\Phi_m^+ \alpha_m^+}$

Theorem 0.8. Supposons que $\varphi(r) = 0$ lorsque $r \leq 0$ et que pour $r > 0$ on a $0 \leq \varphi(r) \leq \min(\beta, r\beta)$ avec $\beta \leq 2$. Alors le flux limité est TVD sous la condition CFL $\mu_{i+\frac{1}{2}}^+ + \mu_{i+\frac{1}{2}}^+ \leq 2/(2 + \beta)$.

Theorem 0.9. Le flux limité est d'ordre deux lorsque $\varphi(1) = 1$ et φ dérivable à gauche et à droite de $r = 1$.



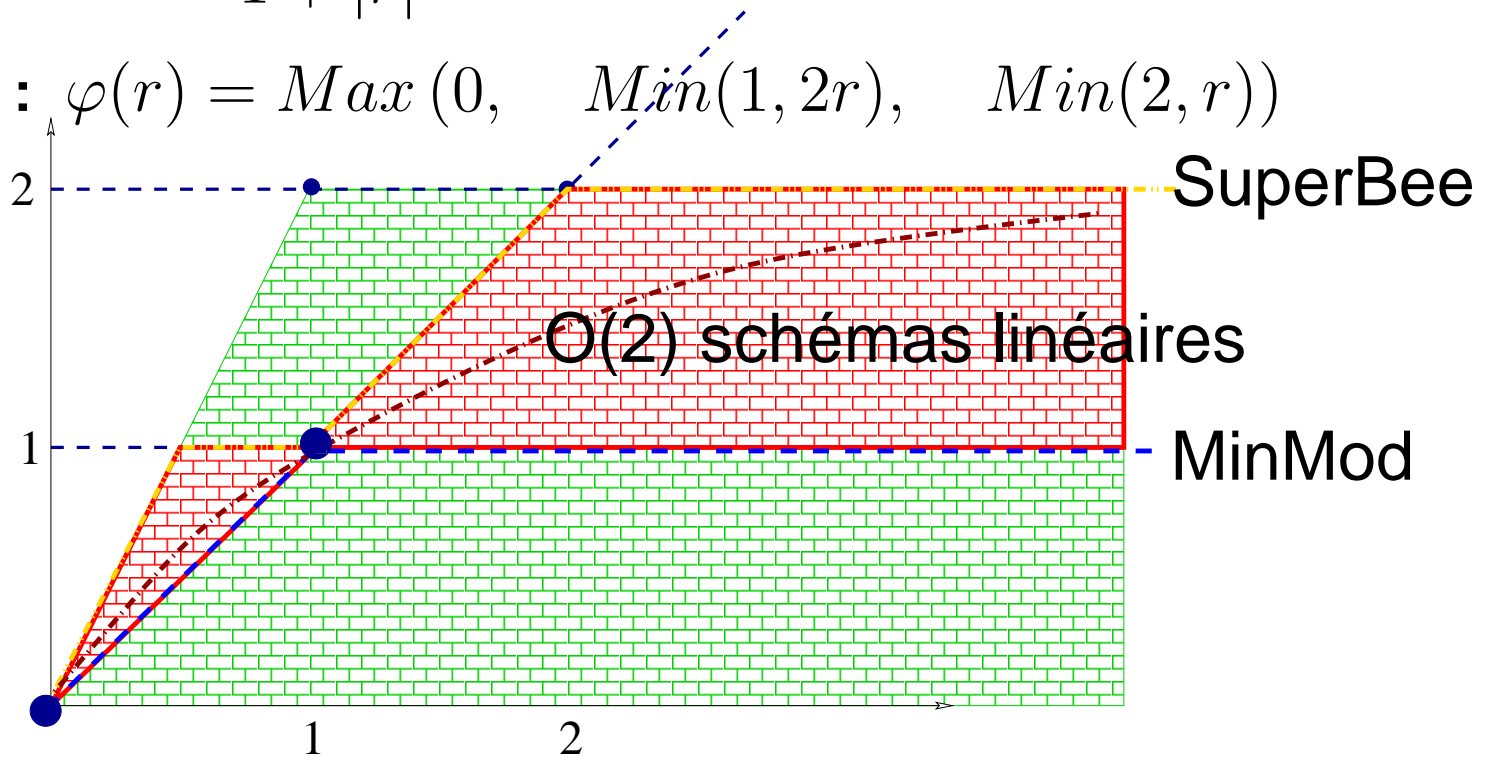
Exemples de limiteurs

Sweby : $\varphi(r) = (1 - \theta(r)) + r\theta(r)$ avec $0 \leq \theta(r) \leq 1$ et TVD.

MinMod : $\varphi(r) = \text{Max}(0, \text{Min}(1, r))$

VanLeer : $\varphi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}$

SuperBee : $\varphi(r) = \text{Max}(0, \text{Min}(1, 2r), \text{Min}(2, r))$



MUSCL: Monotonic Upstream Scalar Limitation

- $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t^n)$ linéaire par morceaux:

$$\mathbf{u}_h^n(\mathbf{x}, t^n) = \mathbf{v}_i^n + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \tilde{\nabla} \mathbf{v}_i^n, \quad \mathbf{x}_{i-\frac{1}{2}} < \mathbf{x} < \mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}$$

- Le flux MUSCL O(2) est $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(\mathbf{v}_{i+}^n, \mathbf{v}_{(i+1)-}^n)$

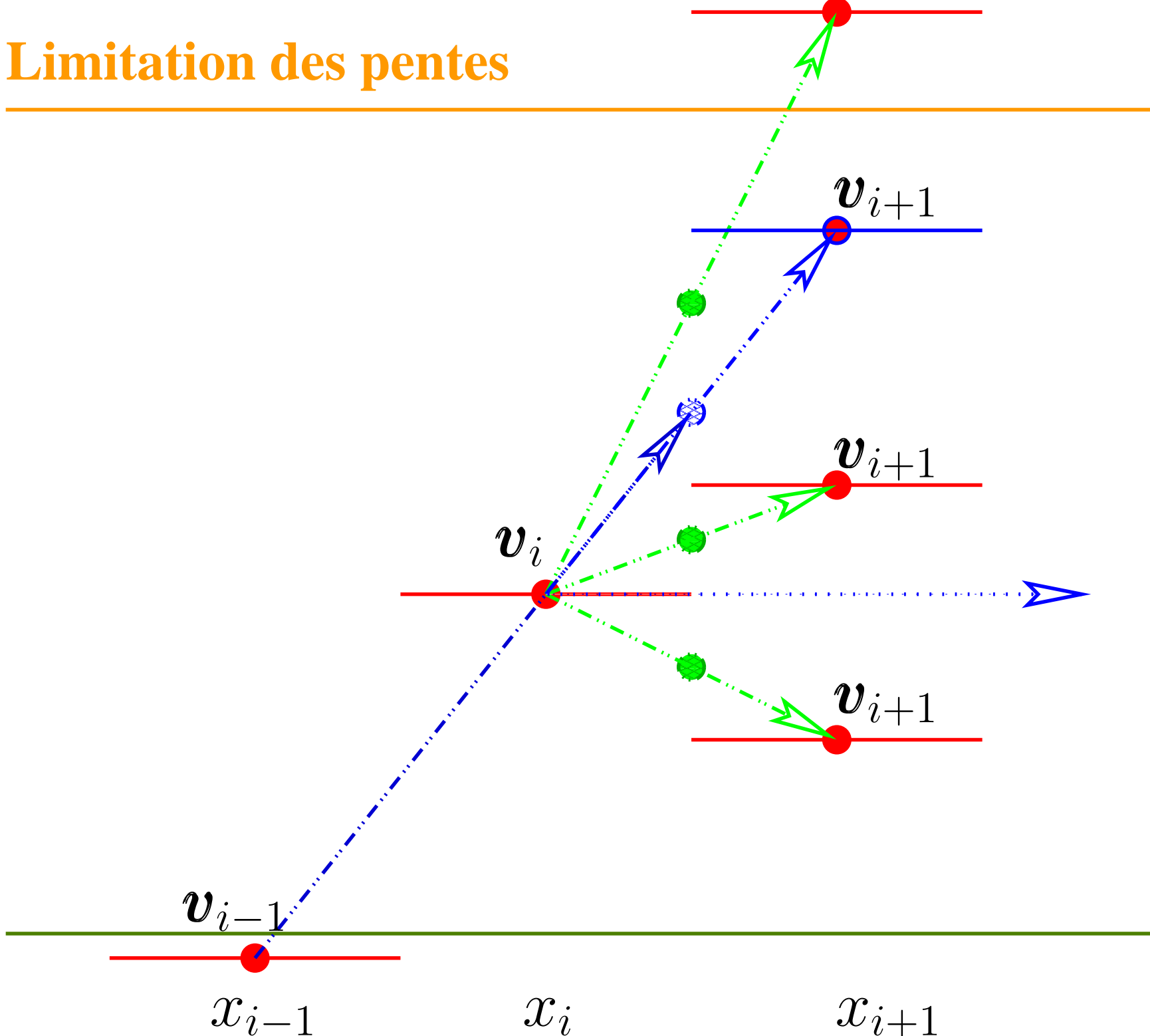
$$\text{avec } \begin{cases} \mathbf{v}_{i+}^n & = \mathbf{v}_i^n + (\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_i) \tilde{\nabla} \mathbf{v}_i^n, \\ \mathbf{v}_{(i+1)-}^n & = \mathbf{v}_{i+1}^n + (\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_{i+1}) \tilde{\nabla} \mathbf{v}_{i+1}^n \end{cases}$$

- Critère de construction des pentes:

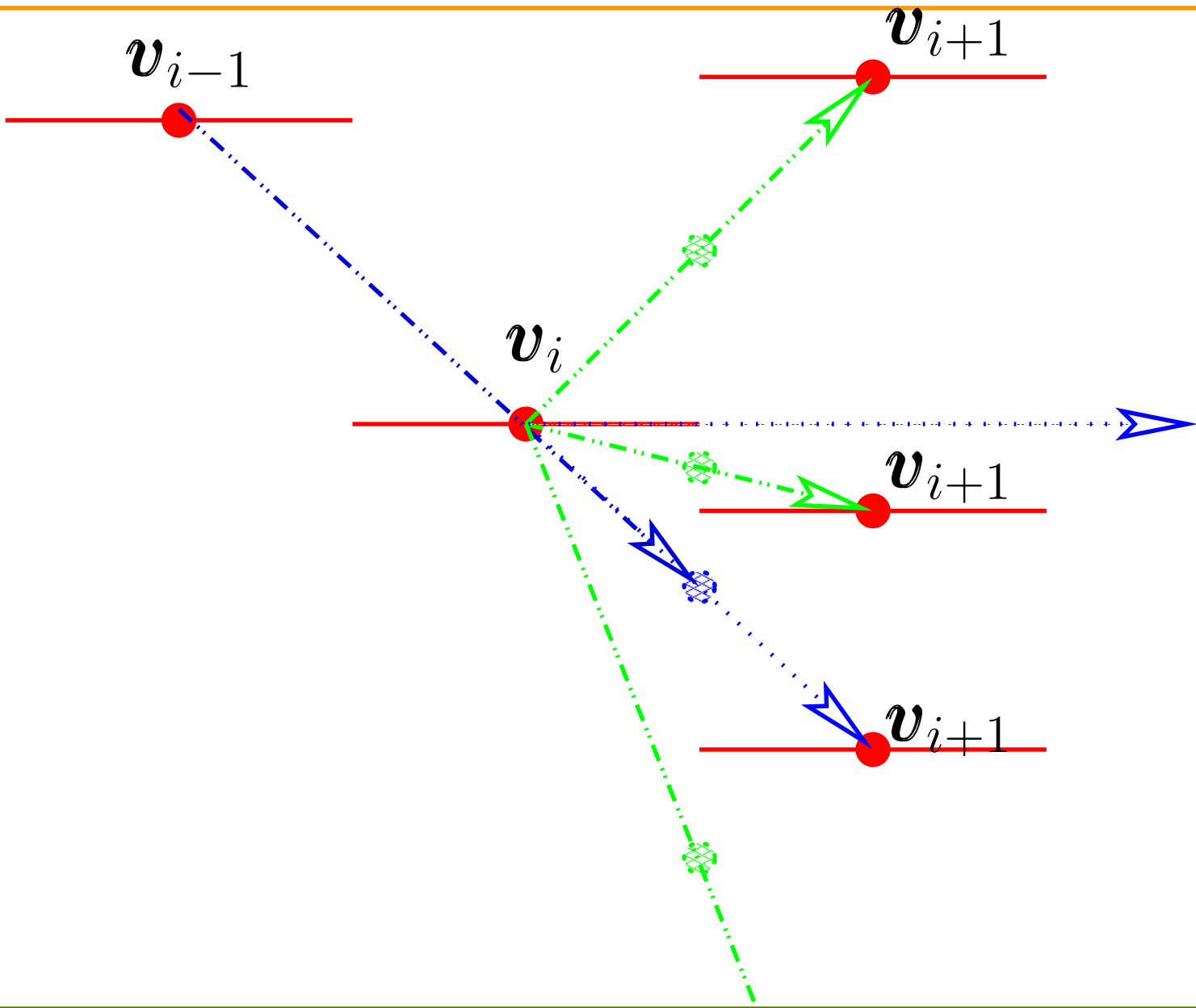
$$\|\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t^n)\|_{BV} \leq \|\overline{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x}, t^n)\|_{BV}$$

$\overline{\mathbf{u}}_h$ est l'approximation constante par morceaux.

Limitation des pentes



Limitation des pentes



Exemples de limiteur

On note $\nabla v_m = \frac{v_{m+\frac{1}{2}}^n - v_{m-\frac{1}{2}}^n}{x_{m+\frac{1}{2}} - x_{m-\frac{1}{2}}}$.

MinMod $\tilde{\nabla} v_i^n |_{i+\frac{1}{2}} = \text{MinMod} \left(2\nabla v_{i-\frac{1}{2}} - \nabla v_{i+\frac{1}{2}}, \nabla v_{i+\frac{1}{2}} \right)$
où : $\text{MinMod}(u, v) = 0.5 * \min(|u|, |v|) (\text{sign}(u) + \text{sign}(v))$

SuperBee $\tilde{\nabla} v_i^n |_{i+\frac{1}{2}} = \text{MinMod} \left(4\nabla v_{i-\frac{1}{2}} - 2\nabla v_{i+\frac{1}{2}}, \nabla v_{i+\frac{1}{2}} \right)$

Conditions aux limites: $x_1 = a + \frac{\delta x}{2}$, $x_N = b - \frac{\delta x}{2}$

- Conditions périodiques: soit $1 \leq k < N$,

$$v_{N+k} = v_k, \quad v_{1-k} = v_{N+1-k}$$

- Conditions de Flux imposés:

$$\phi_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^n + \delta t} \mathbf{f}_a(t) dt, \quad \phi_{N+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^n + \delta t} \mathbf{f}_b(t) dt.$$

- Conditions de Dirichlet :

$$v_0 = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^n + \delta t} v_a^-(t) dt, \quad v_{N+1} = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^n + \delta t} v_b^+(t) dt.$$

- Conditions de Neumann : $v_0 = v_1$ et $v_{N+1} = v_N$.
-



Systeme de lois de conserva-
tion:

Propriétés

Systeme de lois de conservation

- Forme conservative: $\partial_t \mathbf{w} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$.
- Forme quasi-linéaire :

$$\partial_t \mathbf{w} + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} \mathbf{w} = 0, \quad \text{avec } A_j = \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}_j.$$

- Généralisation de la forme quasi-linéaire : Soit $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{v})$ une application avec $P = \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w}$ inversible.

$$\partial_t \mathbf{v} + \sum_j A_j \partial_{x_j} \mathbf{v} = 0$$

avec $A_j = P^{-1} A_j P$.

Système hyperbolique (SH)

Le système de LdC est hyperbolique si, $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$, la matrice

$$\mathcal{A}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^d n_j \mathcal{A}_j \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}.$$

- Valeurs propres: $\lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v})$ avec $\lambda_k < \lambda_{k+1}$.
- Vecteurs propres à droite: $\mathbf{r}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v})$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \mathbf{r}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \mathbf{r}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v})$$

- Vecteurs propres à gauche: $\mathbf{l}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v})$:

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \mathcal{A}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \mathbf{l}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v})$$

- Le système est strictement hyperbolique si il n'y a pas de valeurs propres multiples.
-

SH 1D: Variables Caractéristiques \mathcal{W} .

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathcal{W}} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m] \quad \text{et} \quad \mathcal{W} = \sum_k \omega_k \hat{\mathbf{e}}_k.$$

- Forme canonique

$$\partial_t \mathcal{W} + \Lambda \partial_x \mathcal{W} = 0$$

- Forme canonique pour une k-onde :

$$\partial_t \omega_k + \lambda_k(\mathcal{W}) \partial_x \omega_k$$

- k-courbes caractéristiques:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k(\mathcal{W})$$

SH 1D: courbes caractéristiques.

$$\frac{dx}{dt} = \sigma$$

comme

$$\partial_t \omega_k + \lambda_k(\mathcal{W}) \partial_x \omega_k = 0$$

On a les ondes suivantes:

● k-choc:

$$\lambda_k(\mathcal{W}_l) > \sigma > \lambda_k(\mathcal{W}_r)$$

● k-détente:

$$\lambda_k(\mathcal{W}_l) < \sigma < \lambda_k(\mathcal{W}_r)$$

● k-discontinuité de contact (k-DC):

$$\lambda_k(\mathcal{W}_l) = \sigma = \lambda_k(\mathcal{W}_r)$$

Surface $\mathcal{S}(x, t) = 0$ avec $\mathbf{n} = \nabla_x \mathcal{S}$ et $\sigma = \partial_t \mathcal{S}$.

- La surface $\mathcal{S}(x, t) = 0$ est caractéristique si

$$\det(\sigma I_d - \mathcal{A}(\mathbf{n}, \mathbf{v})) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v})$$

- La surface décrit un k-choc si :

$$\lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}_l) > \sigma > \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}_r)$$

- La surface décrit une k-détente si:

$$\lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}_l) < \sigma < \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}_r)$$

- La surface décrit une k-DC si:

$$\lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}_l) = \sigma = \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}_r)$$

Systeme symétrisable

Un système de LdC est symétrisable si il existe une matrice régulière $\mathcal{A}_0(\mathbf{v})$ symétrique définie positive tel que les matrices $\mathcal{A}_0(\mathbf{v})\mathcal{A}_j(\mathbf{v})$ soient symétriques.

- Un système, de LdC, symétrisable est hyperbolique.
- Les systèmes hyperboliques de LdC ne sont pas tous symétrisables!!!!
- Un système, de LdC, symétrisable admet une entropie strictement convexe.
- Un système, de LdC, ayant une entropie strictement convexe est symétrisable.

Définitions

- Un champ k est linéairement dégénéré (LD) si

$$\nabla_{\mathbf{v}} \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{n}, \quad \|\mathbf{n}\| = 1.$$

- Un champ k est vraiment non-linéaire (VNL) si

$$\nabla_{\mathbf{v}} \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{n}, \quad \|\mathbf{n}\| = 1.$$

- Un k -Invariant de Riemann est une fonction régulière $\mathcal{I}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation:

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{I}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{n}, \quad \|\mathbf{n}\| = 1.$$

k -Invariant de Riemann généralisé

- Les k -Invariants de Riemann généralisés sont des quantités préservées au travers
 - des ondes de k -détente,
 - des ondes de k -Discontinuité de contact.
- Les k -Invariants de Riemann généralisés sont décrits par les ODE suivantes :

$$\frac{d\mathbf{V}^{(1)}}{\mathbf{r}_k^{(1)}} = \frac{d\mathbf{V}^{(2)}}{\mathbf{r}_k^{(2)}} = \dots = \frac{d\mathbf{V}^{(m)}}{\mathbf{r}_k^{(m)}}$$

Relations de saut et Condition d'entropie

Surface $\mathcal{S}(x, t) = 0$ avec $\mathbf{n} = \nabla_x \mathcal{S}$ et $\sigma = \partial_t \mathcal{S}$.

Lorsque \mathcal{S} décrit une surface de discontinuité on a:

- Les Relations de Rankine-Hugoniot, $\sigma [\mathbf{W}] = [\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}]$,
- Les Conditions d'Admissibilité de LAX,
 - Il existe un champ k VNL telque:

$$\begin{cases} \lambda_{k+1}(\mathbf{n}, \mathbf{V}_r) > \sigma > \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_r) \\ \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_l) > \sigma > \lambda_{k-1}(\mathbf{n}, \mathbf{V}_l) \end{cases} \quad \text{On parle de k-choc.}$$

- Il existe un champ k LD telque:

$$\lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_l) = \sigma = \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_r). \quad \text{On parle de k-DC}$$

Ondes élémentaires

● **k -Choc:** k VNL et
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma (\mathbf{W}_l - \mathbf{W}_r) = \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{n} - \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{n} \\ \lambda_{k+1}(\mathbf{n}, \mathbf{V}_r) > \sigma > \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_r) \\ \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_l) > \sigma > \lambda_{k-1}(\mathbf{n}, \mathbf{V}_l) \end{array} \right.$$

● ● **k -DC:** k LD et
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma (\mathbf{W}_l - \mathbf{W}_r) = \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{n} - \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{n} \\ \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_l) = \sigma = \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_r) \\ \frac{d\mathbf{V}^{(1)}}{\mathbf{r}_k^{(1)}} = \frac{d\mathbf{V}^{(2)}}{\mathbf{r}_k^{(2)}} = \dots = \frac{d\mathbf{V}^{(m)}}{\mathbf{r}_k^{(m)}} \end{array} \right.$$

● **k -Détente:** k VNL et
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_l) < \lambda_k(\mathbf{n}, \mathbf{V}_r) \\ \frac{d\mathbf{V}^{(1)}}{\mathbf{r}_k^{(1)}} = \frac{d\mathbf{V}^{(2)}}{\mathbf{r}_k^{(2)}} = \dots = \frac{d\mathbf{V}^{(m)}}{\mathbf{r}_k^{(m)}} \end{array} \right.$$

Les Résultats théoriques

Unicité On considère ce système hyperbolique sous la

forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j \partial_{x_j} \mathbf{v} = 0$ tel que les

matrices \mathcal{A}_j soient symétriques. Si sur l'intervalle $[0, T]$ le problème de Cauchy admet une solution C^1 alors elle est unique sur cet intervalle de temps.

Existence locale pour $\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \in H^s$ avec $s > 1 + \frac{d}{2}$.

Conjecture de LAX Il existe au plus une solution entropique du problème de Cauchy associé à la LdC, lorsque le système est strictement hyperbolique.

Dynamique des gaz: Euler 1D

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) & = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) & = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho h u) & = 0 \end{cases}$$

- Loi d'état : $p(\rho, \epsilon)$.
- Exposant de Grüneisen $\Gamma = \frac{1}{\rho} \partial_\epsilon p$.
- Vitesse du son: $c = \sqrt{\partial_\rho p + \frac{p}{\rho^2} \partial_\epsilon p}$.

Euler 1D: Forme quasi-linéaire

$$\nabla p = \rho \Gamma \nabla \epsilon + \left(c^2 - \Gamma \frac{p}{\rho} \right) \nabla \rho = \rho \Gamma \nabla \epsilon + \theta \nabla \rho.$$

avec $\theta = c^2 - \Gamma \frac{p}{\rho}$

- Forme quasi-linéaire $\partial_t \mathbf{v} + \mathcal{A} \partial_x \mathbf{v} = 0$ avec

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{\theta}{\rho} & u & \Gamma \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u \end{pmatrix}$$

- Le système est strictement hyperbolique si $c(\rho, \epsilon)$ est un réel non nul: $\partial_\rho p + \frac{p}{\rho^2} \partial_\epsilon p > 0$

Euler 1D: Valeurs et Vecteurs propres

- Valeurs propres: $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$ et $\lambda_3 = u + c$.
- Vecteurs propres à droite:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ \frac{p}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \\ -\frac{\theta}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ \frac{p}{\rho} \end{pmatrix}$$

- Vecteurs propres à gauche :

$$\mathbf{l}_1 = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\theta}{\rho}, -c, \Gamma \right), \quad \mathbf{l}_2 = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{2p}{\rho}, 0, -2\rho \right)$$

$$\mathbf{l}_3 = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\theta}{\rho}, c, \Gamma \right).$$

Euler 1D

$$\nabla_v \lambda_1 = \begin{pmatrix} -\partial_\rho c \\ 1 - \partial_u c \\ -\partial_\epsilon c \end{pmatrix}$$

$$\nabla_v \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla_v \lambda_3 = \begin{pmatrix} \partial_\rho c \\ 1 + \partial_u c \\ \partial_\epsilon c \end{pmatrix}$$

Euler 1D

- Le champ associé à la valeur propre λ_1 est en général VNL (exemple gaz parfait: $p = \Gamma\rho\epsilon$):

$$\nabla_v \lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1 = - \left(\rho \partial_\rho c + c + \frac{p}{\rho} \partial_\epsilon c \right)$$

- Le champ associé à la valeur propre λ_2 est linéairement dégénéré (LD):

$$\nabla_v \lambda_2 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$$

et $\mathcal{I}_2 = \lambda_2$ est un 2-invariant de Riemann.

- Le champ associé à la valeur propre λ_3 est en général vraiment non-linéaire (exemple gaz parfait: $p = \Gamma\rho\epsilon$):

$$\nabla_v \lambda_3 \cdot \mathbf{r}_3 = - \nabla_v \lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1$$

Euler 1D gaz parfait: 1-Invariants de Riemann

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{-c} = \rho \frac{d\epsilon}{p}$$

avec $p = \Gamma \rho \epsilon = (\gamma - 1) \rho \epsilon$.

$$\bullet \quad \frac{d\rho}{\rho} = \rho \frac{d\epsilon}{p} \implies \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\epsilon}{\Gamma \epsilon} \implies \frac{d\epsilon}{\epsilon} - \Gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\implies d \left(\log \left(\frac{\epsilon}{\rho \Gamma} \right) + \log(\Gamma) \right) = 0 \implies \mathcal{I}_{(1)}^1 = s$$

avec $s = \log \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)$ l'entropie spécifique.

$$s = Cte \implies p = \beta \rho^\gamma$$

Euler 1D gaz parfait: 1-Invariants de Riemann

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{-c} = \rho \frac{dc}{p}$$

avec $p = \Gamma \rho \epsilon = (\gamma - 1)\rho \epsilon$. Comme ce système implique aussi $s = Cte$ on a $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma \beta \rho^{\gamma-1}$ et on en déduit que

$$2cdc = \gamma \beta (\gamma - 1) \rho^{\gamma-2} d\rho \implies \frac{c}{\rho} d\rho = \frac{2dc}{\gamma - 1}$$

● Par conséquent $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{-c} \implies du + \frac{c}{\rho} d\rho = 0$

$$\implies du + d\left(\frac{2c}{\gamma - 1}\right) = 0 \implies \mathcal{I}_1^{(2)} = u + \frac{2c}{\gamma - 1}$$

Courbes de 1-Détente: $u = \mathcal{R}_1^{(l)}(p)$

$$\begin{cases} u_l - c_l < u - c \\ s_l = s, \quad u_l + \frac{2c_l}{\gamma-1} = u + \frac{2c}{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\bullet \quad s_l = s \rightarrow \frac{\rho_l}{\rho} = \left(\frac{p_l}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rightarrow \left(\frac{c}{c_l}\right)^2 = \frac{p}{p_l} \left(\frac{p_l}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_l}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\bullet \quad u_l + \frac{2c_l}{\gamma-1} = u + \frac{2c}{\gamma-1} \rightarrow u - u_l = -\frac{2c_l}{\gamma-1} \left(\frac{c}{c_l} - 1\right)$$

$$\implies u = \mathcal{R}_1^{(l)}(p) = u_l + \frac{2c_l}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_l}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right).$$

$$\bullet \quad u_l - c_l < u - c \rightarrow \frac{u-u_l}{c_l} > \frac{c}{c_l} - 1 \rightarrow \frac{c}{c_l} < 1 \implies p < p_l.$$

Courbes de 1-Détente: $u = \mathcal{R}_1^{(l)}(p)$

$$\mathcal{R}_1^{(l)}(p) = u_l + \frac{2c_l}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_l} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) \quad \text{avec} \quad p < p_l$$

On a

$$\frac{d\mathcal{R}_1^{(l)}}{dp}(p) = -\frac{c_l}{\gamma p_l} \left(\frac{p}{p_l} \right)^{\frac{-\gamma-1}{2\gamma}}$$

- $\frac{d\mathcal{R}_1^{(l)}}{dp}(p_l) = -\frac{c_l}{\gamma p_l}$
- Dans le plan (u, p) la courbe de 1-Détente est décroissante: $\frac{d\mathcal{R}_1^{(l)}}{dp} < 0$.

Courbes de 1-Choc: $\mathcal{H}_1^{(l)}(p, \vartheta) = 0$

$$\begin{cases} [\rho\mathcal{V}] = 0, & [\rho u\mathcal{V} + p] = [\rho\mathcal{V}^2 + p] = 0, & [\rho e\mathcal{V} + pu] = 0, \\ & u > \sigma > u - c, & \sigma < u_l - c_l \end{cases}$$

où $\mathcal{V} = u - \sigma > 0$. Soit $m = \rho\mathcal{V} > 0$ on a $\rho\mathcal{V}^2 = (\rho\mathcal{V})^2\vartheta$. Par conséquent $m^2 = -\frac{p-p_l}{\vartheta-\vartheta_l}$. Or $\mathcal{V} = m\vartheta$ d'où

$$[\rho e\mathcal{V} + pu] = \left[m \left(\epsilon + \frac{\mathcal{V}^2}{2} \right) + p\mathcal{V} \right] = m \left([\epsilon] + \frac{p + p_l}{2} [\vartheta] \right) = 0$$

Courbe d'Hugoniot: $\mathcal{H}_1^{(l)}(p, \vartheta) = 0$ avec

$$\mathcal{H}_1^{(l)}(p, \vartheta) = \epsilon(p, \vartheta) - \epsilon(p_l, \vartheta_l) + \frac{p + p_l}{2} (\vartheta - \vartheta_l)$$

Courbes de 1-Choc Gaz parfaits : $u = \mathcal{S}_1^{(l)}(p)$

$$\epsilon(p, \vartheta) = \frac{p\vartheta}{\Gamma} = \frac{p\vartheta}{\gamma-1}. \text{ Soit } \mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}:$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{(l)}(p, \vartheta) = 0 &\implies p(\vartheta - \mu^2\vartheta_l) = p_l(\vartheta_l - \mu^2\vartheta) \\ &\implies \vartheta(p + \mu^2 p_l) = \vartheta_l(p_l + \mu^2 p) \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit } \vartheta - \vartheta_l = \vartheta_l \left(\frac{(p_l - p)(1 - \mu^2)}{p + \mu^2 p_l} \right).$$

$$\implies m^2 = \frac{(p_l - p)}{\vartheta - \vartheta_l} = \frac{p + \mu^2 p_l}{\vartheta_l(1 - \mu^2)} = (m(p))^2$$

$$m = \frac{p_l - p}{u - u_l} > 0 \implies u = \mathcal{S}_1^{(l)}(p) = u_l + \frac{(p_l - p)\sqrt{\vartheta_l(1 - \mu^2)}}{\sqrt{p + \mu^2 p_l}}$$

Courbes de 1-Choc Gaz parfaits : $u = \mathcal{S}_1^{(l)}(p)$

$$u = \mathcal{S}_1^{(l)}(p) = u_l + \frac{(p_l - p) \sqrt{v_l(1 - \mu^2)}}{\sqrt{p + \mu^2 p_l}}$$

et on a en plus les conditions $u > \sigma > u - c$, $\sigma < u_l - c_l$.
C'est à dire:

$$u - \sigma < c, \quad u_l - \sigma > c_l \implies \frac{c}{v} > \frac{c_l}{v_l}$$

Sur la courbe d'hugoniot on a $p(v) = \frac{p_l (v_l - \mu^2 v)}{(v - \mu^2 v_l)}$

On en déduit

$$c(v)^2 = \gamma v p(v) \quad \text{et} \quad \frac{c}{v} > \frac{c_l}{v_l} \implies \frac{c(v)^2}{v^2} > \frac{c(v_l)^2}{v_l^2}$$

Courbes de 1-Choc Gaz parfaits : $u = \mathcal{S}_1^{(l)}(p)$

Soit $\theta(\vartheta) = \frac{c(\vartheta)^2}{\vartheta^2} = \frac{\gamma p(\vartheta)}{\vartheta}$ on a $\theta'(\vartheta) = \frac{\gamma(\vartheta p'(\vartheta) - p(\vartheta))}{\vartheta^2}$

$$p'(\vartheta) = -\frac{p_l \vartheta_l (1 - \mu^4)}{(\vartheta - \mu^2 \vartheta_l)^2} \leq 0 \implies \theta'(\vartheta) \leq 0$$

● $\theta(\vartheta) > \theta(\vartheta_l) \implies \vartheta < \vartheta_l$ et $\frac{(p_l - p)}{\vartheta - \vartheta_l} = m^2 \implies p > p_l$

Soit $\beta(\vartheta) = \vartheta^\gamma p(\vartheta)$ on a $\beta'(\vartheta) = \vartheta^\gamma \left(p'(\vartheta) + \frac{\gamma p(\vartheta)}{\vartheta} \right)$, $\gamma = \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2}$.

$$p'(\vartheta) + \frac{\gamma p(\vartheta)}{\vartheta} = -\frac{\gamma p_l (\vartheta - \vartheta_l)^2}{\vartheta (1 - \mu^2 \vartheta_l)^2} \leq 0 \implies \beta(\vartheta) > \beta(\vartheta_l) > \beta(\vartheta_l)$$

● d'où $s(\vartheta) > s(\vartheta_l) \implies m(s - s_l) > 0 \implies [\rho s u] \geq \sigma [\rho s]$.

Courbes de 1-Choc Gaz parfaits : $u = \mathcal{S}_1^{(l)}(p)$

$$\mathcal{S}_1^{(l)}(p) = u_l + \frac{(p_l - p) \sqrt{\vartheta_l(1 - \mu^2)}}{\sqrt{p + \mu^2 p_l}} \quad \text{avec} \quad p > p_l$$

On a

$$\frac{d\mathcal{S}_1^{(l)}}{dp}(p) = -\sqrt{\vartheta_l(1 - \mu^2)} \left(\frac{3p - p_l + 2\mu^2 p_l}{2(p + \mu^2 p_l)^{3/2}} \right) \leq 0$$

- $\frac{d\mathcal{S}_1^{(l)}}{dp}(p_l) = -\sqrt{\vartheta_l(1 - \mu^2)} \left(\frac{2p_l + 2\mu^2 p_l}{2(p_l + \mu^2 p_l)^{3/2}} \right) = -\frac{c_l}{\gamma p_l}$

- Dans le plan (u, p) la courbe de 1-choc est décroissante: $\frac{d\mathcal{S}_1^{(l)}}{dp} \leq 0$.

Courbes de 3-Ondes Gaz parfaits

- Courbes de 3-détente $u = \mathcal{R}_3^{(r)}(p)$

$$\mathcal{R}_3^{(r)}(p) = u_r - \frac{2c_r}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_r} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) \quad \text{avec } p < p_r$$

- Courbes de 3-Choc $u = \mathcal{S}_3^{(r)}(p)$

$$\mathcal{S}_3^{(r)}(p) = u_r - \frac{(p_r - p) \sqrt{\vartheta_r (1 - \mu^2)}}{\sqrt{p + \mu^2 p_r}} \quad \text{avec } p > p_r$$

Courbes de k-Ondes normalisées, Gaz parfaits

$$\hat{u} = \frac{u - u_l}{\sqrt{p_l \vartheta_l}}, \quad \hat{p} = \frac{p}{p_l}, \quad \tilde{u} = \frac{u - u_r}{\sqrt{p_r \vartheta_r}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_r},$$

● 1-Détente $\hat{u} = \hat{\mathcal{R}}_1^{(l)}(\hat{p}) :$

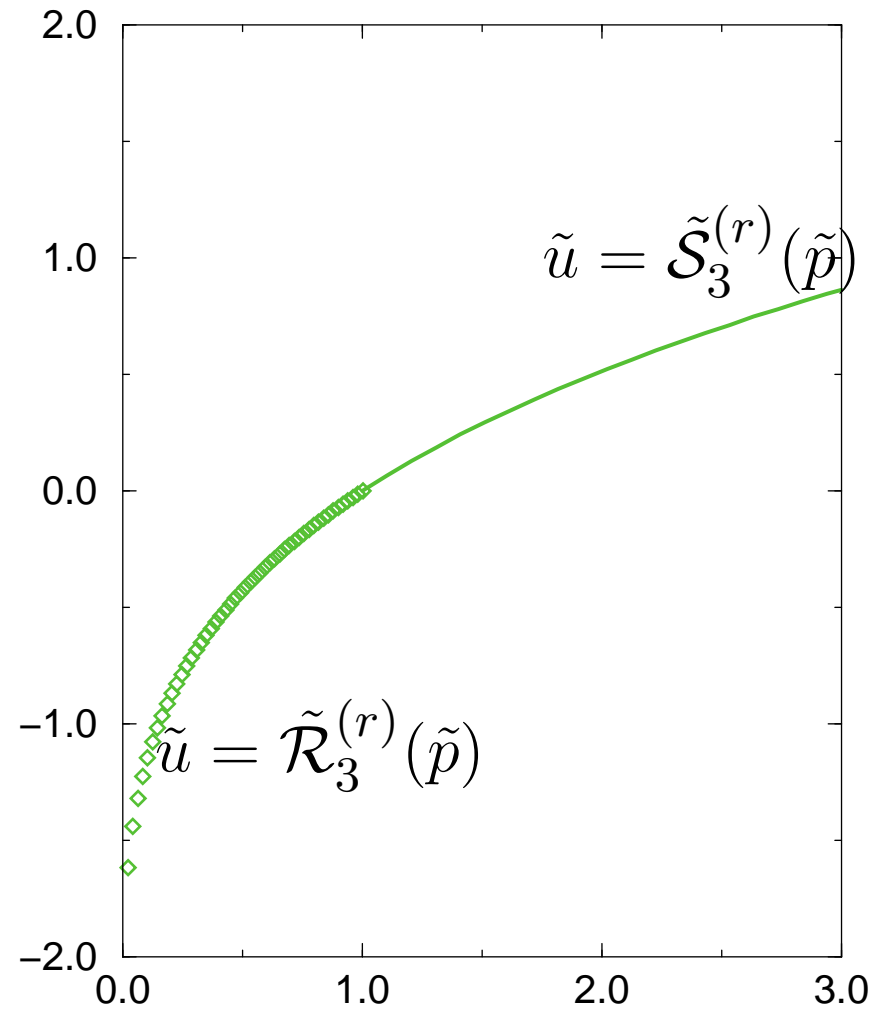
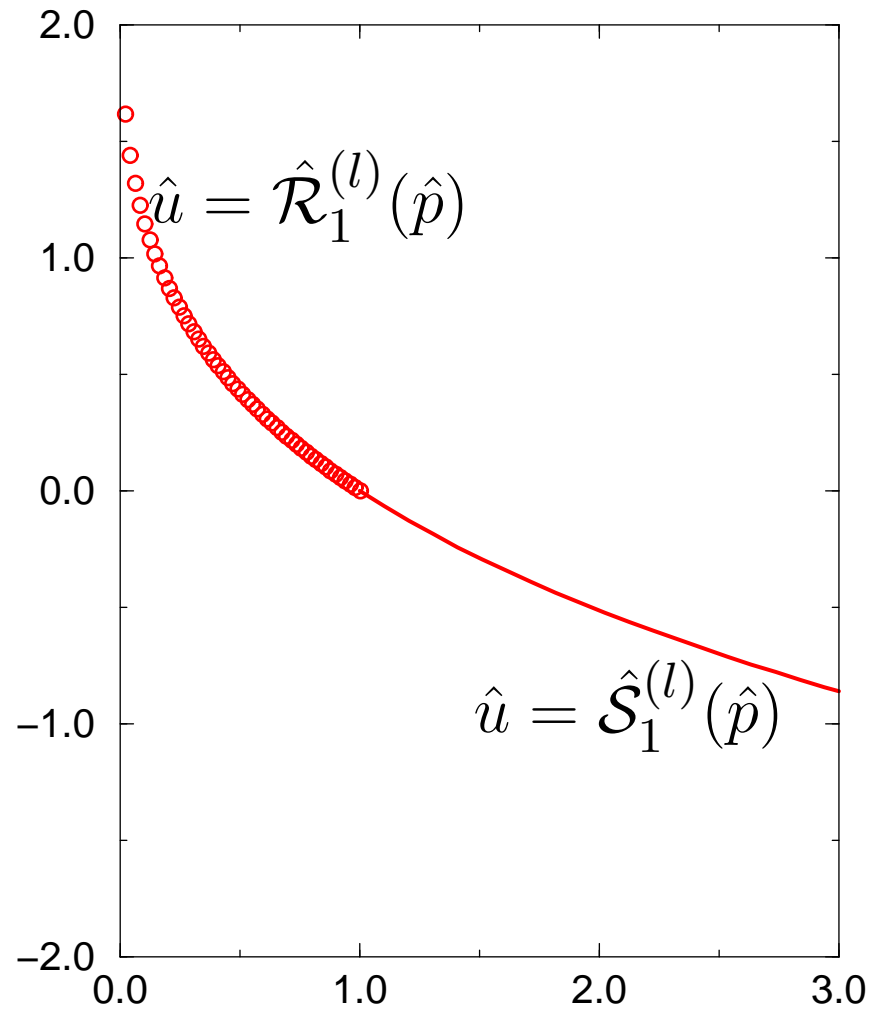
$$\hat{\mathcal{R}}_1^{(l)}(\hat{p}) = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left(1 - \hat{p}^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) \quad \text{avec} \quad \hat{p} < 1$$

● 1-Choc $\hat{u} = \hat{\mathcal{S}}_1^{(l)}(\hat{p}) : \hat{\mathcal{S}}_1^{(l)}(\hat{p}) = \frac{(1-\hat{p})\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{\hat{p}+\mu^2}} \quad \text{avec} \quad \hat{p} > 1$

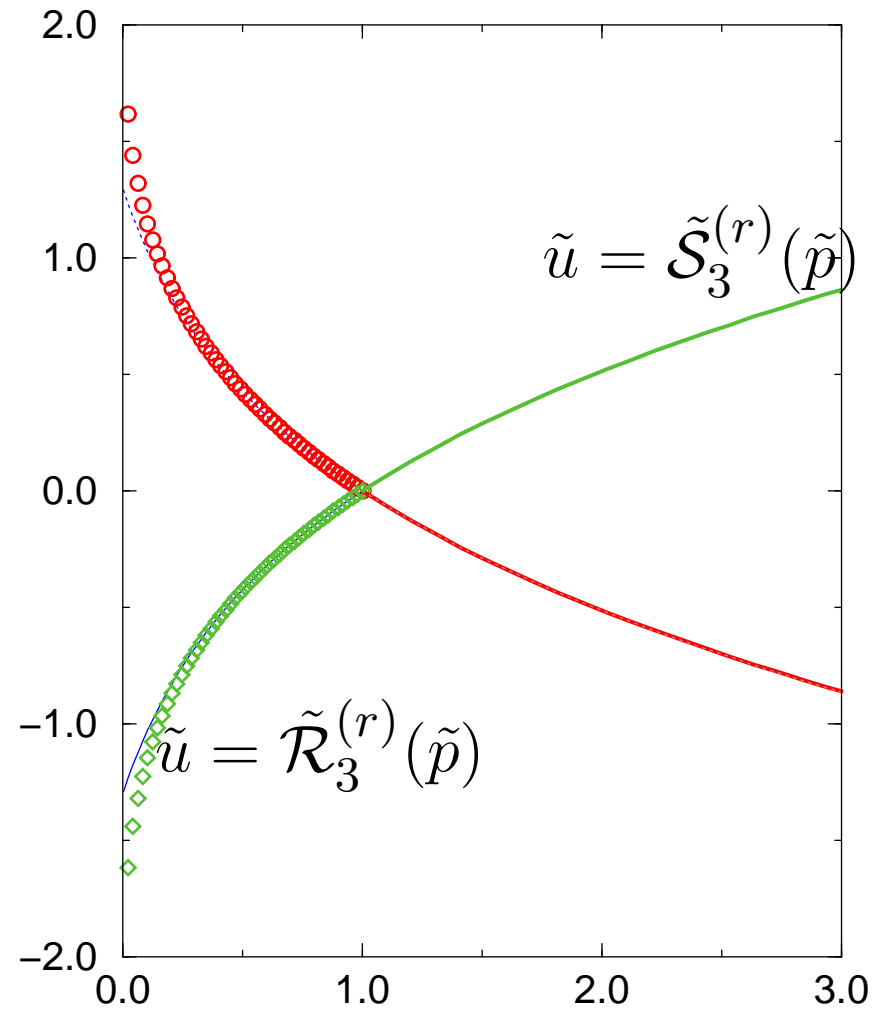
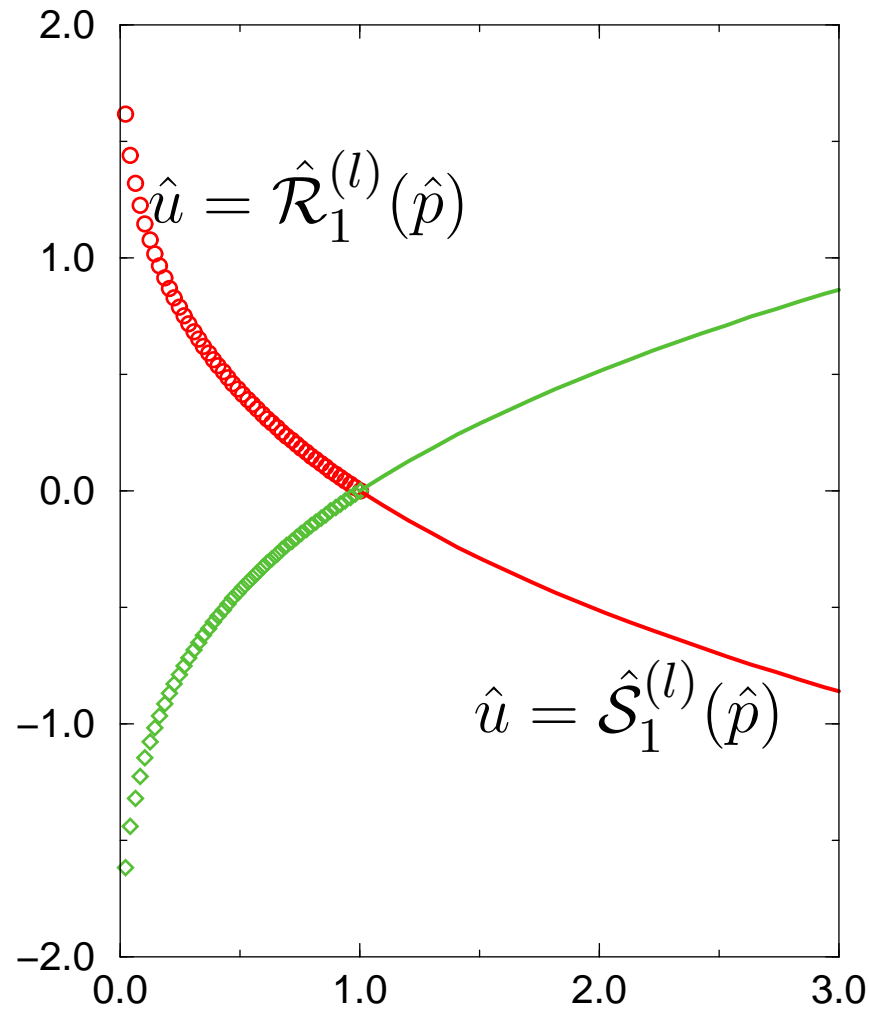
● 3-Détente $\tilde{u} = \tilde{\mathcal{R}}_3^{(r)}(\tilde{p}) = -\hat{\mathcal{R}}_1^{(l)}(\tilde{p}) \quad \text{avec} \quad \tilde{p} < 1.$

● 3-Choc $\tilde{u} = \tilde{\mathcal{S}}_3^{(r)}(\tilde{p}) = -\hat{\mathcal{S}}_1^{(l)}(\tilde{p}) \quad \text{avec} \quad \tilde{p} > 1.$

Courbes de k-Ondes normalisées, Gaz parfaits



Courbes de k-Ondes normalisées, Gaz parfaits



Euler 1D, Gaz parfaits, variables primitives

- Le flux f est homogène de degré 1:

$$f(\mathbf{w}) = (\nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w})) \mathbf{w}$$

- Formulation en variables primitives:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}$$

- Entropie: $\eta = \rho s = \rho \log \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)$ et le flux d'entropie:
 $\Psi = \rho u s$. Remarque: $p = \rho^\gamma \exp(s)$.



Systeme de LdC 1D: Problème de Riemann et Approximations Numériques

Problème de Riemann 1D

$$\mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_l & \text{Si } x < 0 \\ \mathbf{w}_r & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

- $\mathbf{w}(x, t) = \mathcal{W}(\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r, \xi) = \mathcal{W}(\xi)$ avec $\xi = \frac{x}{t}$.
- Là où $\mathcal{W}(\xi)$ est régulière: $(A - \xi) \frac{d\mathcal{W}}{d\xi} = 0$.
 - Soit $\mathcal{W}(\xi)$ est constante.
 - Soit $\mathcal{W}(\xi)$ n'est pas constante et $\xi = \lambda_k(\mathcal{W}(\xi))$: k-détente.
- Là où $\mathcal{W}(\xi)$ est discontinue
 - Soit un k-Choc.
 - Soit une k-Discontinuité de contact.

Problème de Riemann 1D

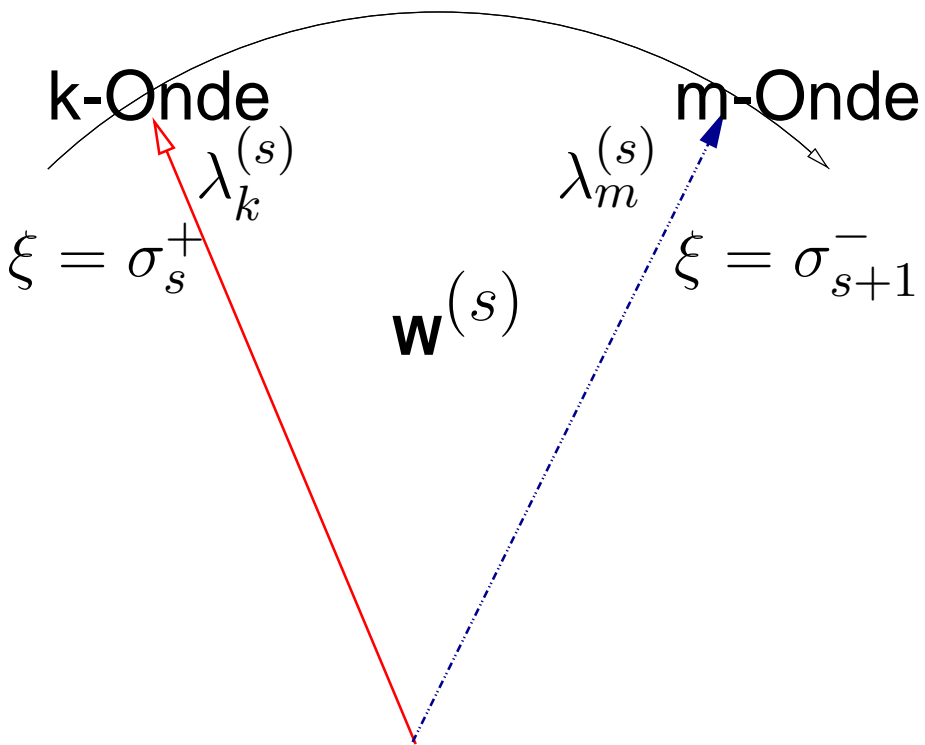
On cherche la solution du problème de Riemann sous la forme d'états constants connectés par des ondes élémentaires:

$$\mathcal{W}(\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r, \xi) = \begin{cases} \mathbf{w}_l & \text{si } \xi < \sigma_1^- \\ \mathbf{w}^{(s)} & \text{si } \sigma_s^+ < \xi < \sigma_{s+1}^- \quad 1 < s < M - 1 \\ \mathbf{w}_s(\xi) & \text{si } \sigma_s^- < \xi < \sigma_s^+ \quad 1 < s < M - 1 \\ \mathbf{w}_r & \text{si } \xi > \sigma_M^+ \end{cases}$$

avec $\sigma_s^- \leq \sigma_s^+ < \sigma_{s+1}^-$ et les $\mathbf{w}^{(s)}$ sont tous différents. Les fonction $\mathbf{w}_s(\xi)$ sont régulières mais non constantes.

Problème de Riemann 1D

Theorem 0.10. *Si le système admet M valeurs propres distinctes, alors la solution du problème de Riemann a au plus $M - 1$ états constants intermédiaires.*



● k-Onde $\longrightarrow \lambda_k^{(s)} \leq \sigma_s^+$.

● m-Onde $\longrightarrow \lambda_m^{(s)} \geq \sigma_{s+1}^-$

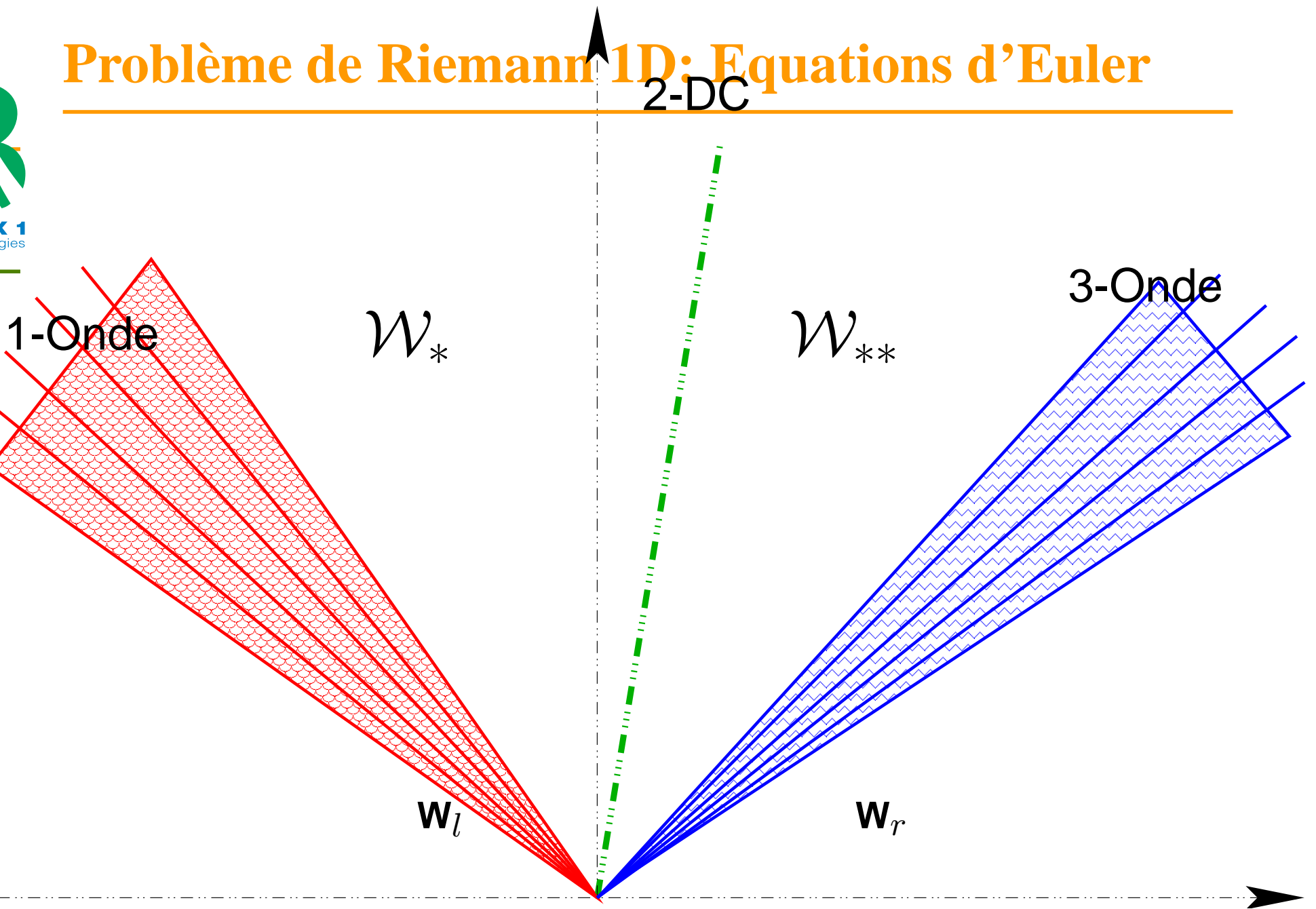
$$\longrightarrow \lambda_m^{(s)} \geq \sigma_{s+1}^- > \sigma_s^+ \geq \lambda_k^{(s)}$$

$$\longrightarrow \lambda_m^{(s)} > \lambda_k^{(s)}$$

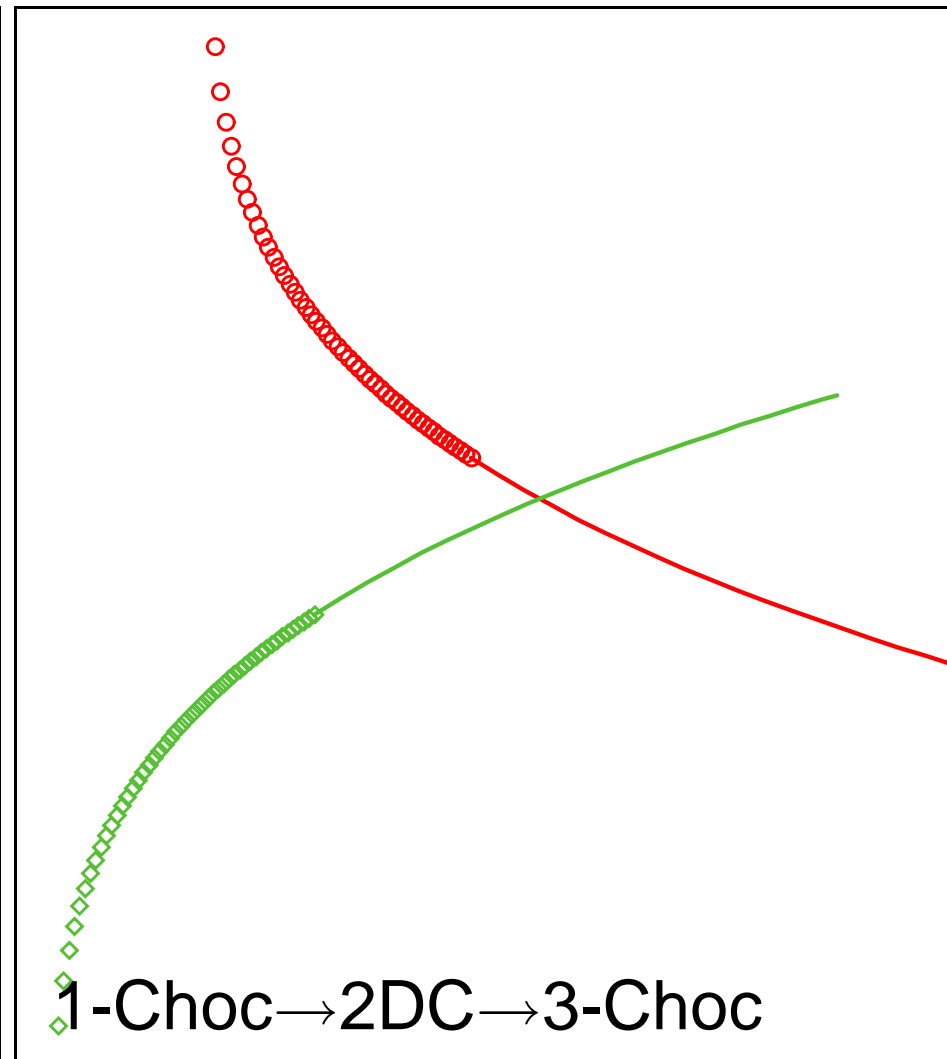
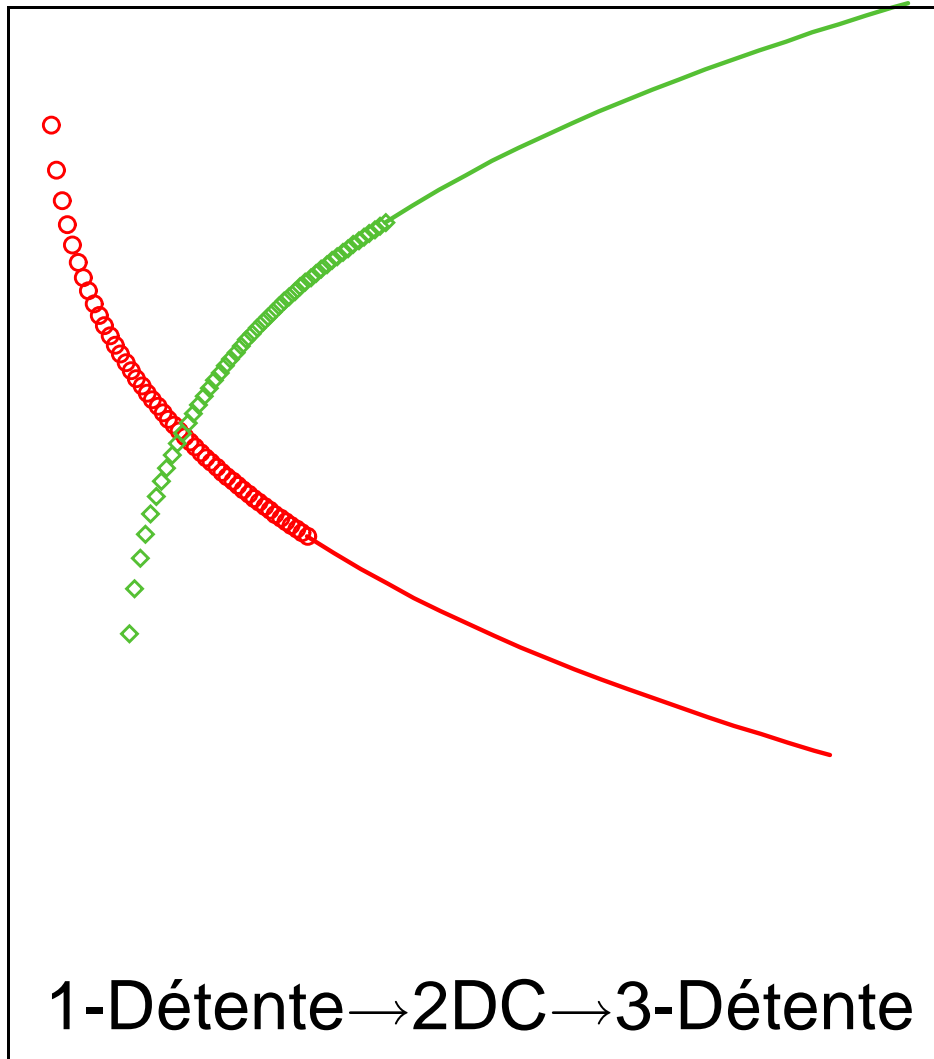
d'où le théorème.

Problème de Riemann 1D: Equations d'Euler

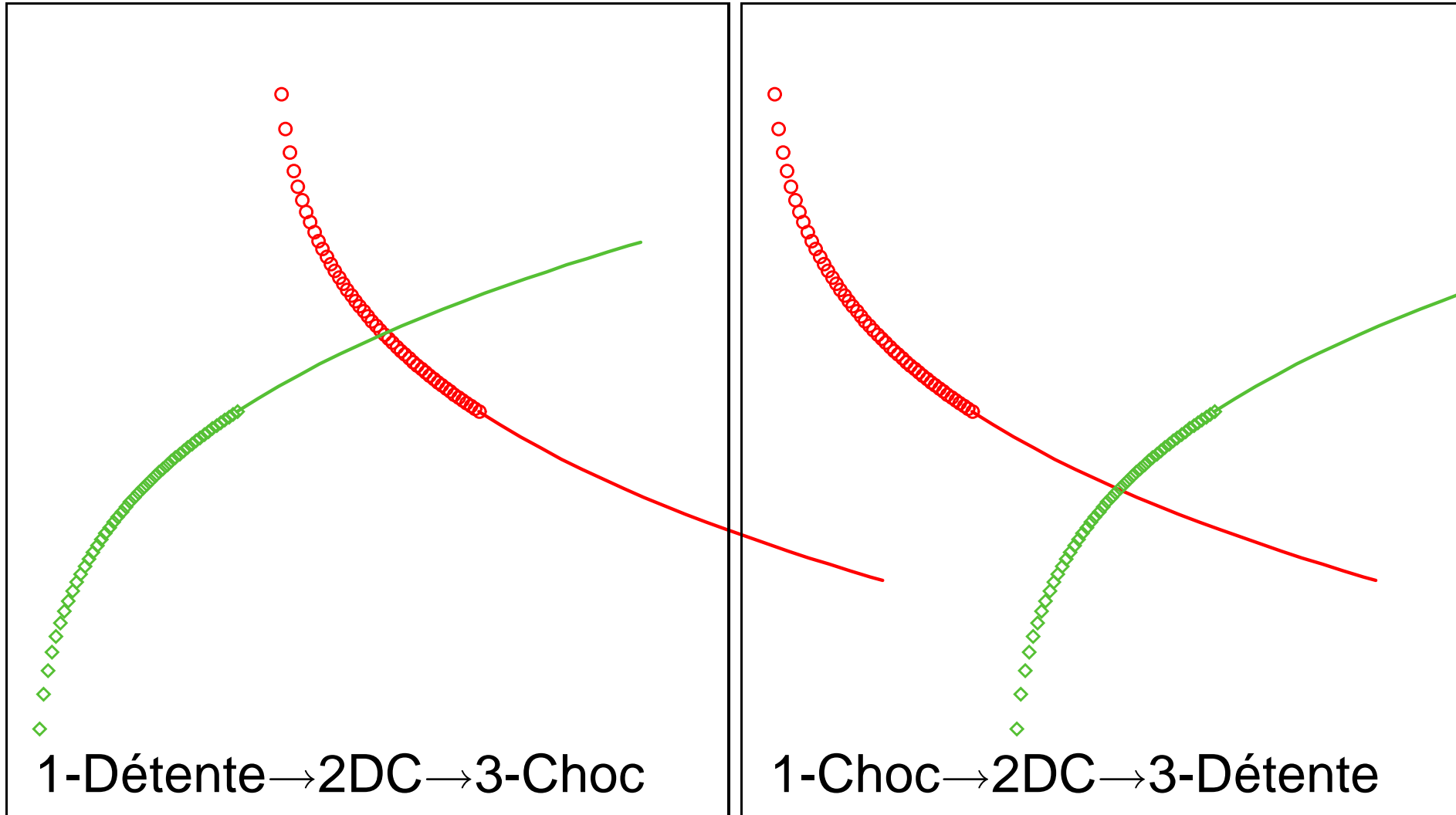
2-DC



Problème de Riemann 1D: Equations d'Euler



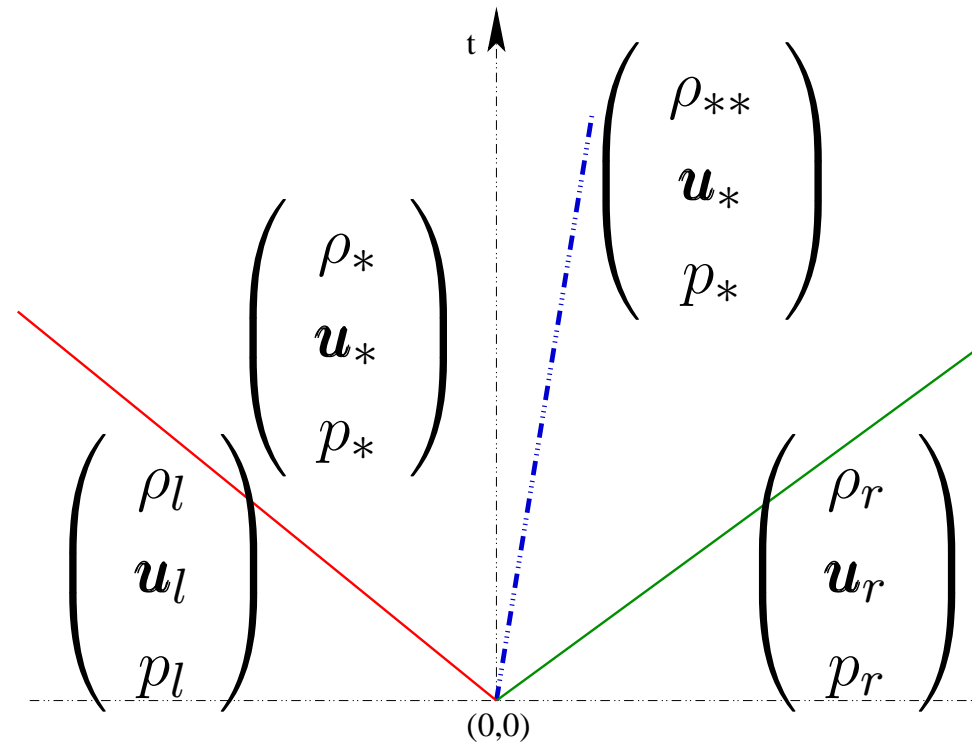
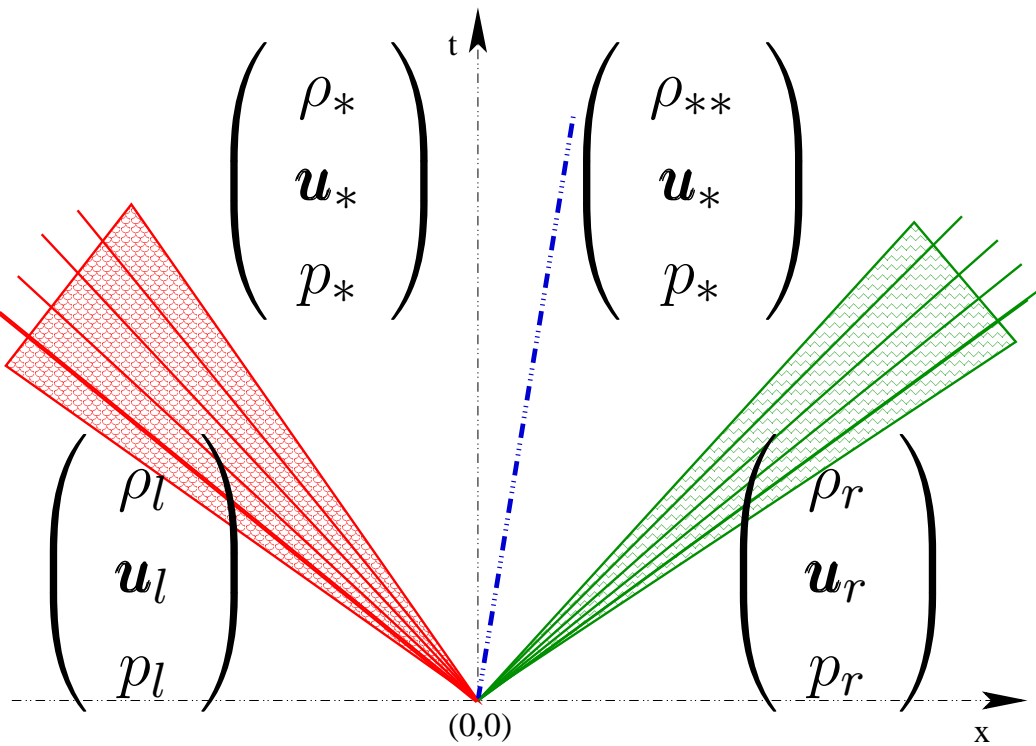
Problème de Riemann 1D: Equations d'Euler



Problème de Riemann 1D: Equations d'Euler

1-Détente → 2DC → 3-Détente.

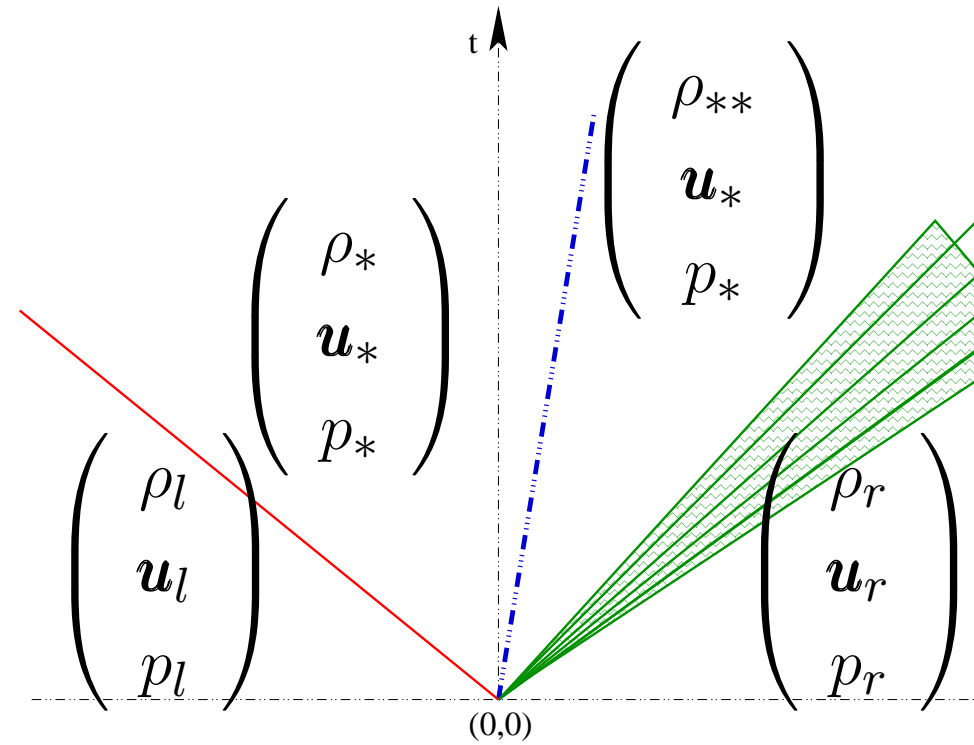
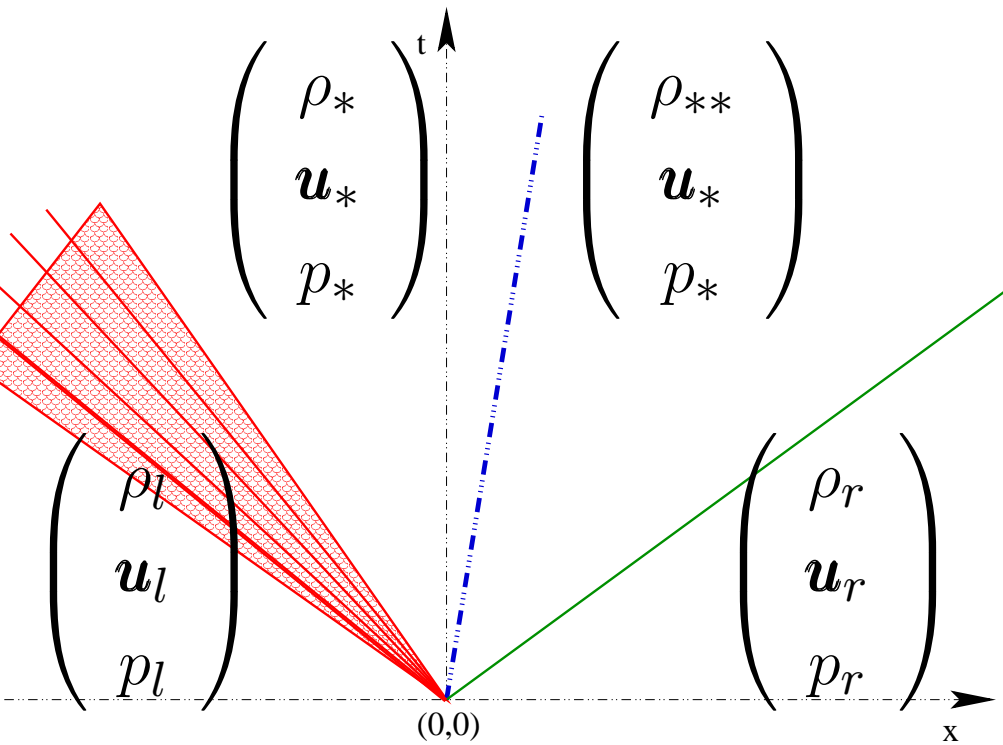
1-Choc → 2DC → 3-Choc



Problème de Riemann 1D: Equations d'Euler

1-Détente → 2DC → 3-Choc

1-Choc → 2DC → 3-Détente.



Schémas de Godunov: Principe



Schémas de type Godunov: $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}^a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_{i+1}, 0)$

- Solveur de Riemann approché par \mathcal{W}^a et \mathbf{f}^a , constituées de $M_i + 2$ états constants: $1 \leq m \leq M_i$,

$$\mathcal{W}^a = \begin{cases} \mathbf{w}_l & \text{si } \xi < \xi_1, \\ \mathbf{w}_*^m & \text{si } \xi_m < \xi < \xi_{m+1}, \\ \mathbf{w}_r & \text{si } \xi > \xi_{M_i+1} \end{cases}, \quad \mathbf{f}^a = \begin{cases} \mathbf{f}_l & \text{si } \xi < \xi_1, \\ \mathbf{f}_*^m & \text{si } \xi_m < \xi < \xi_{m+1}, \\ \mathbf{f}_r & \text{si } \xi > \xi_{M_i+1} \end{cases}$$

avec $\xi_1 \leq \min_{\xi} (\lambda_1(\mathcal{W}(\xi)))$, $\xi_{M_i+1} \geq \max_{\xi} (\lambda_N(\mathcal{W}(\xi)))$,

- Consistance avec la formulation intégrale (CFI):

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{W}^a(\xi) d\xi = \beta \mathcal{W}^a(\beta) - \alpha \mathcal{W}^a(\alpha) - \mathbf{f}^a(\beta) + \mathbf{f}^a(\alpha)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > \alpha$.

Schémas à un état intermédiaire: $Mi = 1$

- la CFI pour $\alpha < \xi_1$ et $\beta > \xi_2$ donne:

$$\mathbf{w}_*^1 = \frac{\xi_2 \mathbf{w}_r - \xi_1 \mathbf{w}_l + \mathbf{f}_l - \mathbf{f}_r}{\xi_2 - \xi_1}$$

- la CFI pour $\alpha < \xi_1$ et $\xi_1 < \beta < \xi_2$ ou bien pour $\xi_1 < \alpha < \xi_2$ et $\beta > \xi_2$ donne:

$$\mathbf{f}_*^1 = \mathbf{f}_l + \xi_1 (\mathbf{w}_*^1 - \mathbf{w}_l) \text{ ou bien } \mathbf{f}_*^1 = \mathbf{f}_r + \xi_2 (\mathbf{w}_*^1 - \mathbf{w}_r)$$

Soit

$$\mathbf{f}_*^1 = \frac{\xi_2 \mathbf{f}_l - \xi_1 \mathbf{f}_r + \xi_1 \xi_2 (\mathbf{w}_r - \mathbf{w}_l)}{\xi_2 - \xi_1}$$

Schémas pour $Mi = 1$: Rusanov, Hll

- Hll

$$\xi_1 \simeq \min(\lambda_1(\mathbf{w}_l), \lambda_1(\mathbf{w}_r)), \quad \xi_2 \simeq \max(\lambda_N(\mathbf{w}_l), \lambda_N(\mathbf{w}_r))$$

- Hll/M

$$\xi_1 \simeq \min(\lambda_1(\bar{\mathbf{w}})), \quad \xi_2 \simeq \max(\lambda_N(\bar{\mathbf{w}}))$$

- Rusanov

$$\xi_1 = -\xi_2, \quad \xi_2 \simeq \max(|\lambda_1(\mathbf{w}_l)|, |\lambda_1(\mathbf{w}_r)|, |\lambda_N(\mathbf{w}_l)|, |\lambda_N(\mathbf{w}_r)|)$$

Schémas de Rusanov et Hill pour Euler 1D

- Rusanov Modifié

$$\xi_1 = -\xi_2, \quad \xi_2 \simeq \max(|u_l| + c_l, |u_r| + c_r)$$

- Hill

- $\xi_1 \simeq \min(u_l - c_l, u_r - c_r), \quad \xi_2 \simeq \max(u_l + c_l, u_r + c_r)$

- $\xi_1 \simeq \bar{u} - \hat{c}(\bar{u}, \bar{h}), \quad \xi_2 \simeq \bar{u} + \hat{c}(\bar{u}, \bar{h})$

- $\xi_1 \simeq \bar{u} - \sqrt{c^2} - \overline{\Delta u}, \quad \xi_2 \simeq \bar{u} + \sqrt{c^2} + \overline{\Delta u}.$

avec

$$\bar{X} = \frac{\sqrt{\rho_l} X_l + \sqrt{\rho_r} X_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}}, \quad \overline{\Delta u} = \frac{\sqrt{\rho_l} \sqrt{\rho_r} (u_l - u_r)^2}{2(\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r})^2}.$$

Schémas de Roe pour Euler 1D : $Mi = M$

On suppose que l'on peut construire un état approché $\tilde{\mathbf{w}}$ tel que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_l) = \tilde{A}(\mathbf{w}_r - \mathbf{w}_l) \quad \text{avec} \quad \tilde{A} = A(\tilde{\mathbf{w}})$$

Soient $\tilde{\lambda}_k$ et $\tilde{\mathbf{r}}_k$ les valeurs propres et les vecteurs propres à droite de la matrice $A(\tilde{\mathbf{w}})$.

$$\mathbf{w}_r - \mathbf{w}_l = \sum_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k, \quad \mathbf{w}_*^m = \mathbf{w}_l + \sum_k^m \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k, \quad \xi_m = \tilde{\lambda}_m$$

$$\text{On a} \quad \mathbf{w}_*^m - \mathbf{w}_*^{m-1} = \alpha_m \tilde{\mathbf{r}}_m \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_r - \mathbf{f}_l = \sum_k^m \alpha_k \tilde{\lambda}_k \tilde{\mathbf{r}}_k$$

Schémas de Roe : $M_i = M$

$\forall i \geq 0, \forall m > i$, on montre la relation suivante:

$$a_i \mathbf{w}_*^i + \sum_{k=i}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) \mathbf{w}_*^k - a_m \mathbf{w}_*^m = - \sum_{k=i}^m a_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k, \quad \forall a_k$$

● la CFI pour $\alpha < \xi_1$ et $\xi_m < \beta < \xi_m + 1$ donne:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_*^m &= \mathbf{f}_l + \sum_{k=1}^m \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k, \\ &= \mathbf{f}_r + (\mathbf{f}_l - \mathbf{f}_r) + \sum_{k=1}^m \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k = \mathbf{f}_r - \sum_{k=m+1}^M \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k, \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_r + \sum_{k=1}^m \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k - \sum_{k=m+1}^M \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k \right) \end{aligned}$$

Schémas de Roe : $M_i = M$

Or $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}_*^m$ pour $\tilde{\lambda}_m \leq 0 \leq \tilde{\lambda}_{m+1}$. D'où :

$$\begin{aligned}\phi_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1} + \sum_{k=1}^m \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k - \sum_{k=m+1}^M \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1} + \sum_{\tilde{\lambda}_k < 0} \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k - \sum_{\tilde{\lambda}_k \geq 0} \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{\mathbf{r}}_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1} + \tilde{A}^- (\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) - \tilde{A}^+ (\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) \right)\end{aligned}$$

Le flux de Roe

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1} - |\tilde{A}| (\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) \right)$$

Matrice de Roe: système des gaz polytropiques

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix},$$

avec $p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right)$ et $\rho H = E + p$.

$$A(u, H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ u \left(\frac{\gamma-1}{2} u^2 - H \right) & H - (\gamma-1)u^2 & \gamma u - 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de Roe: système des gaz polytropiques

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_l) = A(\bar{u}, \bar{H})(\mathbf{w}_r - \mathbf{w}_l)$$

- la première équation est $\rho_r u_r - \rho_l u_l = \rho_r u_r - \rho_l u_l$.
- la seconde équation est:

$$(\rho_r - \rho_l)\bar{u}^2 - 2(\rho_r u_r - \rho_l u_l)\bar{u} + \rho_r u_r^2 - \rho_l u_l^2 = 0$$

$$\bar{u} = \frac{\rho_r u_r - \rho_l u_l \pm \sqrt{\rho_r \rho_l (u_r - u_l)^2}}{\rho_r - \rho_l} = \frac{\sqrt{\rho_r} u_r + \sqrt{\rho_l} u_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}$$

- la dernière équation donne: $\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_r} H_r + \sqrt{\rho_l} H_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}$.

Schémas FVS (Décomposition de flux)

- Le flux du solveur de Riemann est approché par:

$$\mathbf{f}^a(\xi) = \mathbf{f}^a(\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r, \xi).$$

On souhaite aussi avoir les propriétés suivantes:

- Décomposition du flux :

$$\mathbf{f}^a(\xi) = \mathcal{F}^+(\mathbf{w}_l, \xi) + \xi^+ \mathbf{w}_r + \mathcal{F}^-(\mathbf{w}_r, \xi) + \xi^- \mathbf{w}_l$$

- Consistance

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}, \xi) = \mathcal{F}^+(\mathbf{w}, \xi) + \mathcal{F}^-(\mathbf{w}, \xi) = \mathbf{f}(\mathbf{w}) - \xi \mathbf{w}$$

- Décentrage : $\mathcal{A}^+(\xi) = \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{F}^+$ et $\mathcal{A}^-(\xi) = \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{F}^-$
diagonalisables avec $\tilde{\lambda}_k^+(\xi) \geq 0$ et $\tilde{\lambda}_k^-(\xi) \leq 0$

- $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}^a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_{i+1}, 0) = \mathcal{F}^+(\mathbf{w}_i, 0) + \mathcal{F}^-(\mathbf{w}_{i+1}, 0).$

Schémas FVS, Flux homogène: Steger Warming

- Flux homogène

$$\mathbf{f} = A(\mathbf{w})\mathbf{w} = P\Lambda P^{-1}\mathbf{w}$$

- Soit aussi

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) - \xi\mathbf{w} = P(\Lambda - \xi)P^{-1}\mathbf{w}$$

- Décomposition de Steger-Warming

$$\mathcal{F}^{\pm}(\mathbf{w}, \xi) = P(\Lambda - \xi)^{\pm}P^{-1}\mathbf{w}$$

Schémas FVS pour euler: Van Leer

$$\mathcal{M} = \frac{u - \xi}{c}$$

$$(\rho c \mathcal{M})^+ = \frac{\rho c (1 + \mathcal{M})^2}{4}, \quad (\rho c \mathcal{M})^- = -\frac{\rho c (1 - \mathcal{M})^2}{4},$$

$$\rho(u - \xi) = \rho c \mathcal{M} = (\rho c \mathcal{M})^+ + (\rho c \mathcal{M})^-$$

$$\mathcal{F}^\pm(\mathbf{w}, \xi) = (\rho c \mathcal{M})^\pm \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c(\Gamma \mathcal{M} \pm 2)}{\gamma} + \xi \\ \frac{c^2(\Gamma \mathcal{M} \pm 2)^2}{2(\gamma^2 - 1)} + c\xi \mathcal{M} + \frac{\xi^2}{2} \end{pmatrix}$$

Schémas FVS pour euler: AUSM

$$\mathbf{f} - \xi \mathbf{w} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho c u \\ \rho c h \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \mathbf{f}^c(\mathbf{w}) + p \mathbf{e}_2$$

- Décomposition: $\tilde{p} = p^+(\mathbf{w}, \xi) + p^-(\mathbf{w}, \xi)$,

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}^+(\mathbf{w}_l, \xi) + \mathcal{M}^-(\mathbf{w}_r, \xi), \quad \tilde{\mathcal{M}}^\pm = (\tilde{\mathcal{M}} \pm |\tilde{\mathcal{M}}|)/2.$$

- Flux AUSM et variantes:

$$\mathcal{F}^\pm(\mathbf{w}, \xi) = \tilde{\mathcal{M}}^\pm \mathbf{f}^c(\mathbf{w}) + p^\pm(\mathbf{w}, \xi) \mathbf{e}_2$$

Les fonctions $\mathcal{M}^\pm(\mathbf{w}, \xi)$ et $p^\pm(\mathbf{w}, \xi)$ sont à construire.

Schémas FVS pour euler: AUSM

Exemple de construction

$$\mathcal{M}^{\pm}(\mathbf{w}, \xi) = \begin{cases} \pm \frac{(u \pm c - \xi)^2}{4c^2} & \text{si } |u - \xi| < c \\ \frac{(u - \xi \pm |u - \xi|)^2}{2c} & \text{si } |u - \xi| > c \end{cases}$$

$$p^{\pm}(\mathbf{w}, \xi) = p \begin{cases} \frac{c \pm (u - \xi)}{2c} & \text{si } |u - \xi| < c \\ \frac{(u - \xi \pm |u - \xi|)^2}{2(u - \xi)} & \text{si } |u - \xi| > c \end{cases}$$

Schémas FVS : Osher

On a $\mathcal{A}^+(\xi) = \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{F}^+$ et $\mathcal{A}^-(\xi) = \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{F}^-$ soit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(\mathbf{w}_r, \xi) - \mathcal{F}^+(\mathbf{w}_l, \xi) &= \int_{\mathbf{w}_l}^{\mathbf{w}_r} \mathcal{A}^+(\xi) d\mathbf{w}, \\ \mathcal{F}^-(\mathbf{w}_r, \xi) - \mathcal{F}^-(\mathbf{w}_l, \xi) &= \int_{\mathbf{w}_l}^{\mathbf{w}_r} \mathcal{A}^-(\xi) d\mathbf{w}.\end{aligned}$$

Or $\mathbf{f}^a(\xi) = \mathcal{F}_l^+(\xi) + \xi^+ \mathbf{w}_r + \mathcal{F}_r^-(\xi) + \xi^- \mathbf{w}_l$, d'où:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^a(\xi) &= \mathcal{F}_l(\xi) + \xi^+ \mathbf{w}_r + \xi^- \mathbf{w}_l + \int_{\mathbf{w}_l}^{\mathbf{w}_r} \mathcal{A}^-(\xi) d\mathbf{w}, \\ &= \mathcal{F}_r(\xi) + \xi^+ \mathbf{w}_r + \xi^- \mathbf{w}_l - \int_{\mathbf{w}_l}^{\mathbf{w}_r} \mathcal{A}^+(\xi) d\mathbf{w},\end{aligned}$$

Schémas mixte FVS/Godunov type : Osher

Lorsque

$$\xi^+ = \frac{\xi + |\xi|}{2}, \quad \xi^- = \frac{\xi - |\xi|}{2}$$

On a $2\xi^+ - \xi = \xi - 2\xi^- = |\xi|$. D'où

$$\mathbf{f}^a(\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r, \xi) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_r - \int_{\mathbf{w}_l}^{\mathbf{w}_r} |\xi| d\mathbf{w} - \int_{\mathbf{w}_l}^{\mathbf{w}_r} |\mathcal{A}(\xi)| d\mathbf{w} \right)$$

Et le flux d'Osher:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}^a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_{i+1}, 0) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1} - \int_{\mathbf{w}_i}^{\mathbf{w}_{i+1}} |A| d\mathbf{w} \right)$$

Schémas mixte FVS/Godunov type : Roe

On construit une matrice approchée $\tilde{A}(\xi)$ vérifiant:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(\mathbf{w}_r, \xi) - \mathcal{F}^+(\mathbf{w}_l, \xi) &= \int_{\mathbf{w}_l}^{\mathbf{w}_r} \mathcal{A}^+(\xi) d\mathbf{w} = \tilde{A}^+(\xi)(\mathbf{w}_r - \mathbf{w}_l), \\ \mathcal{F}^-(\mathbf{w}_r, \xi) - \mathcal{F}^-(\mathbf{w}_l, \xi) &= \int_{\mathbf{w}_l}^{\mathbf{w}_r} \mathcal{A}^-(\xi) d\mathbf{w} = \tilde{A}^-(\xi)(\mathbf{w}_r - \mathbf{w}_l).\end{aligned}$$

La condition de consistance s'écrit:

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}_r, \xi) - \mathcal{F}(\mathbf{w}_l, \xi) = \tilde{A}(\xi)(\mathbf{w}_r - \mathbf{w}_l)$$

D'où le flux de Roe

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}^a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_{i+1}, 0) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1} - |\tilde{A}|(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i) \right)$$



Systeme de LdC Multi-D : Approximations Numériques

Volumes finis Multi-D

- Maillage : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{Ns} \mathcal{C}_i$, $\Omega = \bigcup_{l=1}^{Nt} \tau_l$,

\mathcal{C}_i les cellules de contrôle et τ_l une autre décomposition du maillage (éléments), $\mathcal{C}_i \cap \tau \neq \emptyset$ si $\tau \in \mathcal{T}(i)$.

- Volumes finis:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{C}_i} (\partial_t \mathbf{w} + \nabla \cdot \mathbf{f}) = 0, \quad \mathbf{w}_i^n = \frac{1}{a_i} \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{w}(x, t^n) dx$$

$$a_i (\mathbf{w}_i^{n+1} - \mathbf{w}_i^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial \mathcal{C}_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$$

Volumes finis Multi-D: Flux par direction

- Décomposition: $\partial\mathcal{C}_i = \bigcup_{j \in \mathcal{V}(i)} \partial\mathcal{C}_{ij} \cap \partial\mathcal{C}_j.$

où $\mathcal{V}(i)$ est, par exemple, l'ensemble des cellules voisines de \mathcal{C}_i et $\partial\mathcal{C}_{ij} = \partial\mathcal{C}_i \cap \partial\mathcal{C}_j.$

- Approximation: $\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\mathcal{C}_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \Delta t \sum_{i \in \mathcal{V}(i)} \phi_{i,j},$

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\mathcal{C}_i \cap \partial\mathcal{C}_j} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \simeq \mathbf{f}_{ij} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}$$

avec $\boldsymbol{\eta}_{ij} = \int_{\partial\mathcal{C}_i \cap \partial\mathcal{C}_j} \mathbf{n} = |\boldsymbol{\eta}_{ij}| \mathbf{n}_{ij}$ une direction moyenne.

Volumes finis Multi-D: Flux par direction

- Problème de Riemann ($F = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}$):

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_n F = 0 \quad \mathbf{W}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{W}_i & \text{si } n < 0 \\ \mathbf{W}_j & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Schéma de Godunov avec $\xi = \frac{n}{t}$: Solution exacte $\mathcal{W}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \xi) = \mathcal{W}_{ij}(\xi)$; flux numérique $\phi_{ij} = F(\mathcal{W}_{ij}(0))$.
- Schéma de type Godunov: flux approchée $F^a(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}, \xi)$, et flux numérique $\phi_{ij} = F^a(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}, 0)$.
- Schémas FVS: $\phi_{ij} = F^a(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, 0) = F^+(\mathbf{W}_i) + F^-(\mathbf{W}_j)$.

Volumes finis Multi-D: Flux par élément

- Volumes finis:

$$a_i(\mathbf{w}_i^{n+1} - \mathbf{w}_i^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{C}_i} \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

- Décomposition: $\mathcal{C}_i = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}(i)} \mathcal{C}_i \cap \tau$

- Approximation: $\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{C}_i} \nabla \cdot \mathbf{f} = \Delta t \sum_{\tau \in \mathcal{T}(i)} \mathcal{B}_{\tau,i} \phi^\tau,$

- Consistance :

$$\phi^\tau = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \sum_{j \in \mathcal{T}} \mathcal{B}_{\tau,j} \phi^\tau = \phi^\tau$$

Volumes finis Multi-D: Flux par élément

- Exemple d'Approximation du flux ϕ^τ :

- τ des $(d + 1) - \text{simplexes}$.
- $\varphi_j(x)$ les fonctions de base P1.

$$\mathbf{f} = \sum_{j \in \tau} \mathbf{f}_j \varphi_j \quad \text{et} \quad \phi^\tau = a_\tau \sum_{j \in \tau} \mathbf{f}_j \cdot \nabla \varphi_j = a_\tau \sum_{j \in \tau} F_j$$

- Flux homogène de degré un: $F_j = \mathcal{A}_j \mathbf{w}_j$ avec

$$\mathcal{A}_j = \sum_{l=1}^d A_l(\mathbf{w}_j) \partial_{x_l} \varphi_j \implies \phi^\tau = a_\tau \sum_{j \in \tau} \mathcal{A}_j \mathbf{w}_j = \sum_{j \in \tau} \mathcal{K}_j \mathbf{w}_j$$

- Décentrage : $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j^+ + \mathcal{A}_j^-$ soit $\mathcal{K}_j = a_\tau \mathcal{A}_j = \mathcal{K}_j^+ + \mathcal{K}_j^-$

Flux Multi-D: Paramètres $\mathcal{B}_{\tau,j}$, Schéma N.

- Principe du schéma N: $\mathcal{B}_{\tau,j}\phi^\tau = \mathcal{K}_j^+(\mathbf{w}_j - \tilde{\mathbf{w}}_\tau)$

$$\tilde{\mathbf{w}}_\tau = \sum_{j \in \tau} N_\tau \mathcal{A}_j^- \mathbf{w}_j \quad \text{avec} \quad N_\tau = - \left(\sum_{j \in \tau} \mathcal{K}_j^+ \right)^{-1}$$

- Cas linéaire: on a $\sum_{j \in \tau} \mathcal{A}_j = 0$

$$\implies N_\tau = - \left(\sum_{j \in \tau} \mathcal{K}_j^+ \right)^{-1} = \left(\sum_{j \in \tau} \mathcal{K}_j^- \right)^{-1}$$

Schéma linéaire positif mais pas LP (d'ordre un).

$\mathcal{B}_{\tau,j}$, Schéma N pour Euler.

Pour les équations d'Euler il existe un état moyen $\bar{\mathbf{w}}_{\tau}$ telque

$$a_{\tau} \sum_{j \in \tau} \mathcal{A}_j \mathbf{w}_j = \sum_{j \in \tau} \mathcal{K}(\bar{\mathbf{w}}_{\tau}, \nabla \phi_j) \mathbf{w}_j$$

On note $\bar{\mathcal{K}}_j = \mathcal{K}(\bar{\mathbf{w}}_{\tau}, \nabla \phi_j)$

$$\implies N_{\tau} = - \left(\sum_{j \in \tau} \bar{\mathcal{K}}_j^+ \right)^{-1} = \left(\sum_{j \in \tau} \bar{\mathcal{K}}_j^- \right)^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{w}}_{\tau} = (\bar{\rho}, \quad \bar{\rho} \bar{u}, \quad E(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{H})), \quad \bar{X} = \sum_{j \in \tau} \sqrt{\rho_j} X_j \Big/ \sum_{j \in \tau} \sqrt{\rho_j}$$

Paramètres $\mathcal{B}_{\tau,j}$, Schémas LDA et Lax-Wendrof.

- Principe du schéma LDA: $\mathcal{B}_{\tau,j} = -\mathcal{K}_j^+ N_\tau$

$$\sum_{j \in \tau} \mathcal{B}_{\tau,j} = \left(- \sum_{j \in \tau} \mathcal{K}_j^+ \right) N_\tau = Id$$

- Principe du schéma Lax-Wendrof: :

$$\mathcal{B}_{\tau,j} = \frac{1}{3} + \frac{\Delta t}{2a_\tau} \bar{\mathcal{K}}_j \quad \text{avec} \quad \bar{\mathcal{K}}_j = a_\tau \sum_{l=1}^d A_l(\bar{\mathbf{w}}_\tau) \partial_{x_l} \varphi_j$$

où $\bar{\mathbf{w}}_\tau$ est un état moyen sur l'élément.

Schémas linéaires LP (d'ordre deux) mais non positifs



Schémas Numériques pour les fluides incompressibles.

Le problème modèle

Ω avec obstacle (Γ) sont données par:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} \quad \text{sur } \Omega \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (17)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (18)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - \Gamma \quad (19)$$

les forces volumiques externes sont supposées négligeables.

Difficultés Numériques

Les problèmes numériques posés par ce système sont:

- La prise en compte de la contrainte d'incompressibilité:
 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.
- La définition de conditions aux limites pour la pression p .
- La précision numérique en espace et en temps.
- la discrétisation de la nonlinéarité.

Propriétés

• $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ car

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

• $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + (\nabla \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$

On a alors: $\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} + \nabla \left(p + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) = \mu \Delta \mathbf{u}$

Or $\nabla \wedge \nabla \mathcal{X} = 0$ et $\nabla \wedge \Delta \mathbf{u} = \Delta (\nabla \wedge \mathbf{u})$, on en déduit une équation dans laquelle la pression est éliminée:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = \Delta \boldsymbol{\omega} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}. \quad (20)$$

Exemple 2D: $\mathbf{u} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$

$$\omega = (\partial_x v - \partial_y u) \vec{k} = \omega \vec{k}.$$

D'où $\omega \wedge \mathbf{u} = \omega (u\vec{j} - v\vec{i})$ et $\nabla \wedge (\omega \wedge \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \omega$.

Et par conséquent:

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \Delta \omega$$

De plus, il existe une fonction (de courant) $\Psi(x, y, t)$ telle que:

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge (\Psi \vec{k}) = \begin{pmatrix} \partial_y \Psi \\ -\partial_x \Psi \end{pmatrix}$$

Dans ce cas on a

$$\omega = -\Delta \Psi$$

Exemple 2D: $\mathbf{u} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$

Le problème initial est donc ramené à la résolution de

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \Delta \omega \quad (21)$$

$$\Delta \Psi + \omega = 0 \quad (22)$$

avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_y \Psi \\ -\partial_x \Psi \end{pmatrix}$ et des conditions aux limites.

La décomposition de Hodge

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\phi \quad \text{où} \quad \mathbf{v} = \nabla \wedge \Psi \text{ avec } \nabla \cdot \Psi = 0.$$

Ψ est le vecteur solénoïdal.

On se place ici dans le contexte où la densité est constante dans le domaine de calcul. Les équations de Navier-Stokes incompressible sont :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla\pi = \mu\Delta\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (23)$$

En appliquant l'opérateur $\nabla \cdot$ à cette équation et en utilisant la condition de compressibilité on trouve

$$\Delta\pi = \nabla \cdot \left(\mu\Delta\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \quad (24)$$

La décomposition de Hodge

La condition d'incompressibilité (C.I.) permet d'établir que

$$\Delta\phi = -\nabla \cdot \mathbf{v} \implies \mathbf{u} = (I - \mathcal{L})\mathbf{v} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}\mathbf{v} = \nabla (\Delta^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{v}))$$

On vérifie que $\mathcal{L}^2\mathbf{v} = \mathcal{L}\mathbf{v}$, et $\mathcal{L}^2\mathbf{u} = 0$ lorsque $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Soit $\mathbb{P} = I - \mathcal{L}$ on a $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$, $\mathbb{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ et $\mathbb{P}\nabla\phi = 0$.

La projection des équations de Naviers-Stokes donne:

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbb{P} \left(\mu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \quad (25)$$

et les solutions de cette equation préservent la condition d'incompressibilité. On en déduit alors que

$$\nabla \pi = (I - \mathbb{P}) \nabla \cdot \left(\mu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right)$$

Méthodes Différences finies en 2D

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \phi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \phi \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad (26)$$

Les opérateurs numériques $(\nabla \cdot)^h$ et ∇^h sont construits pour que

$$\int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \cdot \nabla^h \Phi d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{v}} \Phi (\nabla \cdot)^h \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \text{soit} \quad \nabla^h = \left((\nabla \cdot)^h \right)^T$$

On en déduit alors $\Delta^h = (\nabla \cdot)^h \nabla^h$

Méthodes de compressibilité artificielle

$\rho = \epsilon p$:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \pi = \mu \Delta \mathbf{u} \\ \epsilon \partial_t \pi + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

avec $\epsilon = \frac{\rho_0}{c_0^2}$.

La méthode numérique est alors:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \nabla^h \pi^n = \mu \Delta^h \mathbf{u}^n \\ \epsilon \frac{\pi^{n+1} - \pi^n}{\delta t} + (\nabla \cdot)^h \mathbf{u}^n = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Méthodes de projection

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbb{P} \left(\mu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right)$$

- méthode Ordre 1

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n = \mu \Delta^h \mathbf{u}^n \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbb{P}_h \mathbf{v} \end{cases} \quad (29)$$

Méthodes de projection

- méthode d'Ordre 2

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \phi^{n-\frac{1}{2}} = \mu \Delta^h \frac{\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2} \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbb{P}_h \left(\mathbf{v} + \delta t \phi^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ \phi^{n+\frac{1}{2}} = \phi^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}^{n+1}}{\delta t} \end{cases} \quad (30)$$

La construction de la projection discrète \mathbb{P}_h , pour être consistante, doit utiliser des opérateurs ∇^h , $(\nabla \cdot)^h$ et Δ^h qui satisfont la relation:

$$\Delta^h = (\nabla \cdot)^h \nabla^h + O(h)$$

Methodes MAC et SMAC: Mesh And Cell (projection)

$$\Delta\pi = \nabla \cdot \left(\mu\Delta\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \left(\mathbb{P}^{-1}\partial_t\mathbf{u} \right)$$

• MAC

$$\begin{cases} (\nabla \cdot)^h \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \nabla^h \pi^{n+1} = \mu \Delta^h \mathbf{u}^n \end{cases} \quad (31)$$

Methodes MAC et SMAC: Mesh And Cell (projection)

C'est un système implicite dont les inconnues sont \mathbf{u}^{n+1} et π^{n+1} . Si on applique l'opérateur $(\nabla \cdot)^h$ sur la seconde équation on trouve:

$$\Delta^h \pi^{n+1} = - (\nabla \cdot)^h \left(\frac{\mathbf{u}^n}{\delta t} - \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \mu \Delta^h \mathbf{u}^n \right)$$

On se ramène alors à une formulation explicite:

$$\begin{cases} \Delta^h \pi^{n+1} = - (\nabla \cdot)^h \left(\frac{\mathbf{u}^n}{\delta t} - \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \mu \Delta^h \mathbf{u}^n \right) \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \nabla^h \pi^{n+1} = \mu \Delta^h \mathbf{u}^n \end{cases} \quad (32)$$

Methodes MAC et SMAC: Mesh And Cell (projection)

Les composantes de la vitesse ne sont pas discrétisées aux mêmes points. Pour simplifier la présentation on note:

$$\mathbf{u}_{i,j}^n = \begin{pmatrix} u_{i-\frac{1}{2},j} \\ v_{i,j-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

La pression est discrétisée aux points $\mathbf{x}_{i,j}$: $\pi_{i,j}$. Soient $\delta_x \pi_{i,j} = \frac{\pi_{i+1,j} - \pi_{i,j}}{\delta x}$ et $\delta_y \pi_{i,j} = \frac{\pi_{i,j+1} - \pi_{i,j}}{\delta y}$. Le gradient de la pression et la divergence de la vitesse (toujours pour simplifier la présentation) sont donnés par:

$$\nabla^h \pi_{i,j} = \begin{pmatrix} \delta_x \pi_{i,j} \\ \delta_y \pi_{i,j} \end{pmatrix}, \quad (\nabla \cdot)^h \mathbf{u}_{i,j} = \delta_x u_{i-\frac{1}{2},j} + \delta_y v_{i,j-\frac{1}{2}}$$

Methodes MAC et SMAC: Mesh And Cell (projection)

Pour un maillage régulier, soient

$$\mathcal{C}_{i,j} = \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta x \right] \times \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta y, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y \right]$$

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i,j} \mathcal{C}_{i,j} = \bigcup_{i,j} \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2},j} = \bigcup_{i,j} \mathcal{C}_{i,j+\frac{1}{2}}$$

Methodes MAC et SMAC: Mesh And Cell (projection)

On suppose que les approximations de u et de $\partial_x \pi$ sont constantes sur la cellule $\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2},j}$ que les approximations de v et de $\partial_y \pi$ sont constantes sur la cellule $\mathcal{C}_{i,j+\frac{1}{2}}$ et enfin que les approximations de π , de $\partial_x u$ et de $\partial_y v$ sont constantes sur la cellule $\mathcal{C}_{i,j}$. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla^h \Phi \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \sum_{i,j} \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2},j}} u_{i+\frac{1}{2},j} \delta_x \Phi_{i+\frac{1}{2},j} \, d\mathbf{x} - \sum_{i,j} \int_{\mathcal{C}_{i,j+\frac{1}{2}}} v_{i,j+\frac{1}{2}} \delta_y \Phi_{i,j+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x}$$

On montre alors que:

$$\Delta x \Delta y \sum_{i,j} u_{i+\frac{1}{2},j} \delta_x \Phi_{i+\frac{1}{2},j} = -\Delta x \Delta y \sum_{i,j} \Phi_{i,j} \delta_x u_{i-\frac{1}{2},j}$$

Soit
$$\sum_{i,j} \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2},j}} u_{i+\frac{1}{2},j} \delta_x \Phi_{i+\frac{1}{2},j} \, d\mathbf{x} = - \sum_{i,j} \int_{\mathcal{C}_{i,j}} \Phi_{i,j} \delta_x u_{i-\frac{1}{2},j} \, d\mathbf{x}$$

Methodes MAC et SMAC: Mesh And Cell (projection)

de même on montre que

$$\sum_{i,j} \int_{\mathcal{C}_{i,j+\frac{1}{2}}} v_{i,j+\frac{1}{2}} \delta_y \Phi_{i,j+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} = - \sum_{i,j} \int_{\mathcal{C}_{i,j}} \Phi_{i,j} \delta_y v_{i,j-\frac{1}{2}} d\mathbf{x}$$

Soit en fin de compte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^h \Phi \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} &= - \sum_{i,j} \int_{\mathcal{C}_{i,j}} \Phi_{i,j} \left(\delta_x u_{i-\frac{1}{2},j} + \delta_y v_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \Phi (\nabla \cdot)^h \mathbf{u} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Algorithmes Implicites

$$\begin{cases} (\nabla \cdot)^h \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \theta \mathcal{A}_h \mathbf{u}^{n-1} + (1 - \theta) \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \nabla^h \pi^{n+1} = \mu (\alpha \Delta^h \mathbf{u}^{n+1} + \end{cases} \quad (33)$$

La résolution se fait par pas fractionnaires.

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \theta \mathcal{A}_h \mathbf{u}^{n-1} + (1 - \theta) \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n = \mu ((1 - \alpha) \Delta^h \mathbf{u}^n) \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}}{\delta t} + \nabla^h \pi^{n+1} = \mu (\alpha \Delta^h \mathbf{u}^{n+1}) \\ \Delta^h \pi^{n+1} = \frac{(\nabla \cdot)^h \mathbf{v}}{\delta t} \end{cases} \quad (34)$$

avec comme condition aux limites

$$\partial_n \pi^{n+1} = - \frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v} - \mu \Delta^h \mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}}{\delta t}$$

Algorithmes Implicites: Algorithme SMAC

pour \mathbf{u}^n et π^n donnés. On commence par résoudre l'équation du mouvement avec un champ de pression approché $\pi^* \simeq \pi^n$ par exemple.

$$\frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \nabla^h \pi^* = \mu \Delta^h \mathbf{u}^n$$

Après cette étape, l'équation de vorticité est encore satisfaite, même si π^* est approchée. Il faut donc apporter une correction: $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{v} + \nabla^h \phi$. Soit $\Delta^h \phi = -(\nabla \cdot)^h \mathbf{v}$ et

$$\frac{\mathbf{v}}{\delta t} + \nabla^h \pi^* = \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla^h \left(\pi^* - \frac{\phi}{\delta t} \right)$$

Algorithmes Implicites: Algorithme SMAC

La pression corrigée est donc $\pi^{n+1} = \pi^* - \frac{\phi}{\delta t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathcal{A}_h \mathbf{u}^n + \nabla^h \pi^n = \mu \Delta^h \mathbf{u}^n \\ \Delta^h \phi = - (\nabla \cdot)^h \mathbf{v} \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{v} + \nabla^h \phi \\ \pi^{n+1} = \pi^n - \frac{\phi}{\delta t} \end{array} \right. \quad (35)$$

Algorithme SIMPLE

SIMPLE: Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations.

- Pression approché : $\pi^* \simeq \pi^n$.
- Vitesse approchée : \mathbf{v}

$$\frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + \mathcal{A}_h \mathbf{v} + \nabla^h \pi^* = \mu \Delta^h \mathbf{v} \iff \mathbb{A}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathcal{S}(\mathbf{u}^n, \pi^*)$$

avec $\mathbb{A}(\mathbf{v}) = D(\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) - U(\mathbf{v})$ et $\mathcal{S}(\mathbf{u}^n, \pi) = \frac{\mathbf{u}^n}{\delta t} - \nabla^h \pi$.
 \mathbf{v} vérifie l'équation:

$$(D(\mathbf{v}) - \mathcal{E}(\mathbf{v}) - \mathcal{F}(\mathbf{v})) \mathbf{v} = \mathcal{S}(\mathbf{u}^n, \pi^*)$$

Algorithme SIMPLE

- corrections : $\pi = \pi^* + \pi'$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$
sous les contraintes :

$$\mathcal{D}(\mathbf{v})\mathbf{v} = (\mathcal{E}(\mathbf{v}) - \mathcal{F}(\mathbf{v}))\mathbf{v} + \mathcal{S}(\mathbf{u}^n, \pi) \quad \text{et} \quad (\nabla \cdot)^h \mathbf{u} = 0.$$

- $\mathcal{D}(\mathbf{v})\mathbf{v}' = -\nabla^h \pi'$.
- Lorsque $\mathcal{D}(\mathbf{v})$ est une matrice diagonale:

$$(\nabla \cdot)^h \mathcal{D}(\mathbf{v})\mathbf{v}' = \mathcal{D}(\mathbf{v}) (\nabla \cdot)^h (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = -\mathcal{D}(\mathbf{v}) (\nabla \cdot)^h \mathbf{v}$$

- π' vérifie : $\Delta^h \pi' = \mathcal{D}(\mathbf{v}) (\nabla \cdot)^h \mathbf{v}$

Suivant la taille de $\|\pi'\|$ le processus est ou n'est pas réitéré.

- A convergence on a $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}$ et $\pi^{n+1} = \pi$.

Algorithme SIMPLE

Le pas de l'algorithme SIMPLE, pour \mathbf{u}^n et π^n donnés, avec $(\nabla \cdot)^h \mathbf{u}^n \simeq 0$, se résume à:

1. On se donne $\pi^* \simeq \pi^n$.

2. On calcule \mathbf{v}^* vérifiant l'équation:

$$(\mathcal{D}(\mathbf{v}^*) - \mathcal{E}(\mathbf{v}^*) - \mathcal{F}(\mathbf{v}^*)) \mathbf{v}^* = \mathcal{S}(\mathbf{u}^n, \pi^*)$$

3. On calcule la correction (π') de la pression en résolvant le système:

$$\Delta^h \pi' = \mathcal{D}(\mathbf{v}^*) (\nabla \cdot)^h \mathbf{v}^*.$$

4. On calcule la correction (\mathbf{v}') de la vitesse en résolvant le système:

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}^*) \mathbf{v}' = -\nabla^h \pi'.$$

5. Si $\|\pi'\| > \epsilon$ alors: $\pi^* = \pi^* + \pi'$ et aller en 2).

Algorithme Algorithme SIMPLER

Dans la version révisé de l'algorithme SIMPLE, on se donne plutôt un champ de vitesse approché \mathbf{v}^* . On suppose que l'on a construit \mathbf{u}^n telque $(\nabla \cdot)^h \mathbf{u}^n \simeq 0$. On cherche alors une pression approchée π^* telle que

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}^*)\omega = (\mathcal{E}(\mathbf{v}^*) + \mathcal{F}(\mathbf{v}^*))\mathbf{v}^* + \mathcal{S}(\mathbf{u}^n, \pi^*) \quad \text{avec} \quad (\nabla \cdot)^h \omega = 0$$

Comme $(\nabla \cdot)^h \mathbf{u}^n \simeq 0$ et $\mathcal{S}(\mathbf{u}^n, \pi) = \frac{\mathbf{u}^n}{\delta t} - \nabla^h \pi$ on a

$(\nabla \cdot)^h \mathcal{S}(\mathbf{u}^n, \pi^*) = -\Delta^h \pi^*$. En appliquant l'opérateur $(\nabla \cdot)^h$ et en utilisant le fait que la matrice $\mathcal{D}(\mathbf{v}^*)$ est diagonale, on obtient

$$\Delta^h \pi^* = (\nabla \cdot)^h [(\mathcal{E}(\mathbf{v}^*) + \mathcal{F}(\mathbf{v}^*))\mathbf{v}^*] \quad (36)$$

Après c'est un peu plus compliqué si on souhaite utiliser des notations compactes.



K 1
gies

