Considérons le schéma numérique suivant

$$\begin{cases} \omega_j^n = 0 & \text{pour} \quad j = 0 \\ \dfrac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\delta t} + \dfrac{a}{2\delta x}\left(\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n\right) = \dfrac{\xi}{2\delta x}\left(\omega_{j+1}^n - 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n\right) & \text{pour} \quad j = 1, \cdots, N_x \\ \alpha\frac{\omega_j^n - \omega_{j-1}^n}{\delta x} + \beta\omega_j^n = 0 & \text{pour} \quad j = N_x + 1 \end{cases}$$

pour $0 \leq n \leq N_t$, avec

$$\omega_j^0 = \frac{1 - \cos(2\pi j\delta x)}{2} \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots, N_x$$

On suppose par la suite que ce schéma est une approximation d'une EDP pour laquelle la solution exacte $\omega(t, x)$ est au moins $C^4\left([0, T] \times [0, 1]\right)$ et que ω_j^n est une approximation de $\omega(t^n, x_j)$ avec

$$t^n = n\delta t = \frac{nT}{N_t} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq n \leq N_t \text{ et } \quad x_j = j\delta x = \frac{j}{N_x + 1} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j \leq N_x + 1.$$

Cas 1 : $\xi = \frac{2}{\delta x}$, $a = 0$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$:

3pts) Trouvez l'EDP pour laquelle le schéma précédent est consitant.

9pts) Montrez, dans ce cas, que le schéma est d'ordre 1 en temps et en espace.

DM) Modifiez l'approximation de la condition à la limite en $x = 1$ de manière à retrouver l'ordre deux en espace.

Cas 2 : $\xi = 1$, $a = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$:

2pts) Trouvez l'EDP pour laquelle le schéma précédent est consitant.

3pts) Montrez, dans ce cas, que le schéma est d'ordre 1 en temps et en espace.

5pts) Etudiez la stabilité Von Neumann du schéma (à partir du facteur d'amplification)

Devoir Maison (DM) : Pour $\xi = \frac{2}{\delta x}$, $a = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$:

DM) Trouvez l'EDP pour laquelle le schéma précédent est consitant.

DM) Montrez, dans ce cas, que le schéma est d'ordre 1 en temps et en espace.

DM) Etudiez la stabilité Von Neumann du schéma.