UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2017/2018**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Notation
page web : http ://math.unice.fr/∼parus/A2.html

1. Vecteurs et matrices colonnes des coordonnées.

Soit E un espace vectoriel. On écrit $v \in E$ si v est un vecteur de E (on peut ajouter une flèche pour souligner qu'il s'agit d'un vecteur : $\vec{v} \in E$).

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et soit $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots v_n\vec{e}_n = \sum_1^n v_i\vec{e}_i$. Alors on note par

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.
Par exemple, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors

$$X = [\vec{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est la matrice colonne des coordonnées de x dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$.

2. Matrices. Matrices de passage.

On note par $M_{p,n}(\mathbb{R})$ (ou $M_{p,n}(k)$ pour un corps quelconque k) l'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices carrées $M_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté aussi par $M_n(\mathbb{R})$ ou $M(n, \mathbb{R})$.

Pour deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E on note par $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in M_{\dim E}(\mathbb{R})$ et pour tout $\vec{v} \in E$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[\vec{v}]_{\mathcal{B}'}.$$

3. Matrices des applications linéaires.

Soient E, F deux espaces vectoriels, on note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F respectivement, alors on note par

$$Mat_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)$$

la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, c.-à.-d la matrice qui pour tout $v \in E$ satisfait

$$[f(v)]_{\mathcal{B}_F} = Mat_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)[v]_{\mathcal{B}_E}.$$

En particulier, si $E = F$ et $f = id_E$ alors

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_E).$$

Si E, F, G sont trois espaces vectoriels avec respectivement des bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$ et si on a $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et

$$Mat_{\mathcal{B}_G}^{\mathcal{B}_E}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_G}^{\mathcal{B}_F}(g)Mat_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f).$$

En particulier, si $E = F = G$ et $f = g = id_E$ alors

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1}P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}.$$