UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2016/2017**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 1
page web : http ://math.unice.fr/∼parus/A2.html

Exercice 1
On note $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.1) Existe-t-il un unique endomorphisme T de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\begin{cases} T(\vec{e_1}) = & \vec{e_2} + \vec{e_3} \\ T(\vec{e_2}) = & \vec{e_2} - \vec{e_1} \\ T(\vec{e_3}) = & \vec{e_1} + \vec{e_2} \end{cases}$?

Si oui, calculer l'image $T(x, y, z)$ d'un vecteur quelconque (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, l'image, le noyau et le rang de T, et donner la matrice de T dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1.2) Mêmes questions pour T vérifiant les conditions $\begin{cases} T(\vec{e_1}) & = & \vec{e_2} + \vec{e_3} \\ T(\vec{e_1} - \vec{e_2}) & = & \vec{e_3} + \vec{e_1} \\ T(\vec{e_3}) & = & \vec{e_1} + \vec{e_2} \end{cases}$.

1.3) Mêmes questions pour T vérifiant les conditions $\begin{cases} T(\vec{e_2} + \vec{e_3}) & = & \vec{e_1} \\ T(\vec{e_3} - \vec{e_1}) & = & \vec{e_2} \\ T(\vec{e_1} + \vec{e_2}) & = & \vec{e_3} \end{cases}$.

Exercice 2
On note $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2.1) Quelle est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^5$, de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ définie par $f(\vec{e_1}) = (1, 1, 1, 2, 5), f(\vec{e_2}) = (2, 1, 0, 3, 4), f(\vec{e_3}) = (-1, 0, -1, 4, 7), f(\vec{e_4}) = (-9, -2, 1, -1, 9)$?

2.2) Calculer son rang, en déduire le rang de f et les dimensions du noyau et de l'image de f.

2.3) Donner une base du noyau et une base de l'image de f.

Exercice 3
On considère les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer les produits AC et CA. Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC, BCA ? Si oui, les calculer de deux manières pour vérifier, sur ce cas particulier, l'associativité du produit de matrices.

Exercice 4
Trouver les matrices A carrées d'ordre 2 telles que

a) $A^2 = A$.

b) $AB = BA$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

5.1. On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer les puissances de N et sans aucun calcul supplémentaire, en déduire si N est inversible ou pas.
En exprimant simplement $I_2\,^2 - N^2$, en déduire que $I_2 + N$ est inversible, et une expression de son inverse en fonction de N.

5.2. Soit E un espace vectoriel quelconque (même éventuellement de dimension infinie) et T un endomorphisme de E, tel que $T^2 = 0$.

a) Montrer que $Im(T) \subset Ker(T)$.

b) Montrer que $Id_E + T$ est un automorphisme de E et calculer (en termes de T) son inverse.

5.3. Soit a un nombre réel non nul, et $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Décomposer A sous la forme $aI_2 + N$, avec N telle que $N^2 = 0$.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n en justifiant qu'on peut appliquer ici la formule de Newton.

b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, peut-on calculer A^k ? Si oui le faire .

Exercice 6

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = (X-1)P' - P$.

6.1. Calculer l'image $f(aX^3 + bX^2 + cX + d)$ d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déduire $ker(f)$.

6.2. Pour chaque Q de $\mathbb{R}_3[X]$, l'équation $f(P) = Q$ a-t-elle au moins une solution dans $\mathbb{R}_3[X]$?

6.3. Calculer $f((X-1)^k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

En déduire une caractérisation des polynômes Q de $\mathbb{R}_3[X]$ pour lesquels l'équation $f(P) = Q$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_3[X]$.

6.4. En utilisant les résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{R}_3[X]$ l'équation différentielle

$$(X-1)P' - P = X^2 - 2X + 2$$

Exercice 7

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $tr({}^tAA) = 0$.

7.1. Calculer les coefficients diagonaux de ${}^tAA$.
7.2. Que peut-on dire de A ?

Exercice 8

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

8.1. Montrer que A est inversible et calculer sa matrice inverse.

8.2. Calculer $A^3 - A$ et retrouver alors l'inverse de A.

Exercice 9

9.1. Vérifier que $P_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$ est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la projection orthogonale sur la droite vectorielle de vecteur directeur $u = (\cos\theta, \sin\theta)$.

9.2.
a) Déterminer la matrice A_θ, dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, de la rotation vectorielle directe $f_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, d'angle θ autour de l'axe orienté par $\vec{e}_3$.

b) Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice $B_{\theta'}$ de la rotation vectorielle directe $g_{\theta'} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, d'angle θ' autour de l'axe orienté par $\vec{e}_1$.

(c) On fixe $\theta = \pi/4$. Est-ce que les rotations f_θ et g_θ commutent ?