UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS — **2017/2018**
Faculté des Sciences — Algèbre 2
Département de Mathématiques — Feuille de révisions
page web : http ://math.unice.fr/∼parus/A2.html

Toutes vos réponses doivent être justifiées

Exercice 1

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On note F la partie de E caractérisée dans cette base par le système linéaire $S = \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & & -x_3 = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 = & 0 \\ & x_2 & -x_3 = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 = & 0 \end{array}\right.$

1.1) Dans ce contexte, que désignent les variables x_1, x_2, x_3 ?
1.2) Sans calculs, que peut-on dire à propos du sous-ensemble $\mathcal{S}o\ell(S)$ de $\mathbb{R}^3$ formé des solutions de S, et que peut-on en déduire pour F ?
1.3) Par transformations de Gauss successives, déterminer un système échelonné équivalent à S, préciser les variables de tête et les variables libres de ce système échelonné, et en déduire le rang de S.
1.4) Sans calcul supplémentaire que pouvez vous dire de la nature géométrique de $\mathcal{S}o\ell(S)$?
1.5) Résoudre le système échelonné obtenu et en déduire la nature géométrique précise de F par la donnée d'une de ses bases. (*Attention : les vecteurs de F ne sont pas dans* $\mathbb{R}^3$).

Exercice 2

Pour chaque réel α, on considère le système linéaire homogène T_α de matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$,

et on désigne par F_α l'ensemble des solutions de T_α.

2.1) Calculer, selon les valeurs du paramètre α, le rang du système T_α .
2.2) Pourquoi F_α est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Préciser sa dimension selon la valeur de α.
2.3) Pour chaque valeur de α telle que $dim(F_\alpha) \neq 0$, donner une base de F_α.

Exercice 3

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$,
et $\mathcal{F}$ la famille des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 suivants :
$v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_1 + e_4$, $v_3 = e_2 - e_3$, $v_4 = e_2 - 2e_3 - e_4$, $v_5 = e_1 - e_2$.

Pour tout vecteur v de E, on note $X_v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sa colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}_E$.

Soit F le s.e.v de E engendré par $\mathcal{F}$,

et G celui caractérisé dans la base $\mathcal{B}_E$ par le système linéaire homogène S de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.1) Donner une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G et montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3.2) On note pr_F^G la projection vectorielle sur F dans la direction G.

Rappeler, pour un vecteur quelconque v de E, la définition de $pr_F^G(v)$, puis calculer explicitement le vecteur $w = pr_F^G(u)$ pour le vecteur u de E défini par la donnée $X_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : E et F désignent deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

4.1) Parmi les applications de E dans F suivantes, préciser celles qui sont linéaires et donner, si possible, pour chacune d'elles, une base de son noyau, une base de son image, et préciser si elle est injective, surjective, bijective.

4.1.1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^4$ et $\psi_1 = (\ (x, y, z) \mapsto (x - z, x - yz, 0, y + 2z)\ )$

4.1.2) $E = \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\psi_2 = \big(\ M \mapsto (x \mapsto Trace(M)sin(x^2))\ \big)$

4.1.3) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ et $\psi_3 = \left(P \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{P}(0) & \tilde{P}(1) \\ \tilde{P}'(0) & \tilde{P}'(1) \end{pmatrix} \right)$

où $\tilde{P}$ désigne la fonction polynomiale réelle associée au polynôme P.

4.2) Parmi celles qui sont linéaires, lesquelles peut-on représenter à l'aide d'une matrice ?
Le faire en précisant vos choix de bases (si possible canoniques).

Exercice 5 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

5.1) Montrer que l'application $\psi = (P \mapsto P \circ X^3)$ est un endomorphisme de E.

5.2) Déterminer le noyau de ψ et en déduire s'il injectif ?

5.3) Est-il un automorphisme de E ?