Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, w) = (-x + 2z - w, -x + y + z - w, 2x - y - 3z + 2w)$.

2.1) Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

2.2) Calculer le rang de f et les dimensions du noyau et de l'image de f.

2.3) Donner une base du noyau et une base de l'image de f.

2.4) Proposer une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^4$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ telles que $Mat^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2
On note $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.1) Existe-t-il un endomorphisme T de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\begin{cases} T(\vec{e_1}) = & \vec{e_2} + \vec{e_3} \\ T(\vec{e_2}) = & \vec{e_1} \\ T(\vec{e_3}) = & \vec{e_1} + \vec{e_2} \end{cases}$?

Si oui, est-il unique ? Calculer l'image $T(x, y, z)$ d'un vecteur quelconque (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, l'image, le noyau et le rang de T, et donner la matrice de T dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1.2) Mêmes questions pour T vérifiant les conditions $\begin{cases} T(\vec{e_2} + \vec{e_3}) & = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ T(\vec{e_3} - \vec{e_1}) & = \vec{e_2} \\ T(\vec{e_1} + \vec{e_2}) & = \vec{e_3} \end{cases}$.

1.3) Mêmes questions pour T vérifiant les conditions $\begin{cases} T(\vec{e_2} + \vec{e_3}) & = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ T(\vec{e_3} - \vec{e_1}) & = \vec{e_2} \\ T(\vec{e_1} + \vec{e_2}) & = \vec{e_1} \end{cases}$.

Exercice 3
On note $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$.

6.1) Montrer que le noyau de Δ consiste des polynômes constants, c.-à.-d. $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

6.2) Soit $\Delta_3 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ la restriction de Δ. Écrire la matrice de Δ_3 dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. Décrire sous forme $Vect$, en précisant leurs dimensions, le noyau et l'image de Δ_3.

6.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque et soit $\Delta_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ la restriction de Δ. Montrer que $\ker(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$ et $Im(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (Vous pouvez verifier d'abord que $Im(\Delta_n)$ est contenue dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et, ensuite, conclure par le théorème du rang.)

6.4) Montrer que l'equation $\Delta P = Q$ a toujours une solution. Comment peut-on à partir d'une solution déduire l'ensemble des solutions de cette équation ?

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

8.1. Montrer que A est inversible et calculer sa matrice inverse.

8.2. Montrer que A satisfait la relation $A^3 - A - 4I = 0$. En déduire l'inverse de A.

Exercice 5

5.1. On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les puissances de N et sans aucun calcul supplémentaire, en déduire si N est inversible ou pas.
En exprimant simplement $I_3^2 - N^2$, en déduire que $I_3 + N$ est inversible, et une expression de son inverse en fonction de N.

5.2. Soit E un espace vectoriel quelconque (même éventuellement de dimension infinie) et T un endomorphisme de E, tel que $T^2 = 0$.

a) Montrer que $Im(T) \subset Ker(T)$.

b) Montrer que $Id_E + T$ est un automorphisme de E et calculer (en termes de T) son inverse.

5.3. Soit a un nombre réel non nul, et $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Décomposer A sous la forme $aI_2 + N$, avec N telle que $N^2 = 0$.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n en justifiant qu'on peut appliquer ici la formule de Newton.

b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, peut-on calculer A^k ? Si oui le faire .

Exercice 6

9.1. Vérifier que $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la rotation d'angle θ.

9.2.
a) Déterminer la matrice A_θ, dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, de la rotation vectorielle directe $f_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, d'angle θ autour de l'axe orienté par $\vec{e}_3$.

b) Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice $B_{\theta'}$ de la rotation vectorielle directe $g_{\theta'} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, d'angle θ' autour de l'axe orienté par $\vec{e}_2$.

(c) On fixe $\theta = \pi, \theta' = \pi/3$. Est-ce que les rotations f_θ et $g_{\theta'}$ commutent ?