UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2017/2018**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 2

On rappelle que les valeurs propres et espaces propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont ceux de l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

On désigne par T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.1 Montrer que $\vec{u} = (1, -1, 2)$ est un vecteur propre de T. Déterminer l'espace propre de sa valeur propre.
1.2 Montrer que 4 est une valeur propre de T et déterminer l'espace propre correspondant.
1.3 Est-ce que 0 est une valeur propre de T ?
1.4 Diagonaliser T, c.-à.-.d. proposer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de T. Trouver la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(T)$.

Exercice 2

2.1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A. Est-ce que A est diagonalisable ?
Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
2.2. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ donné par la formule $f(P(X)) = XP'(X)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application f.
2.3. Proposer un exemple d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont 2 et 3 et qui n'est pas triangulaire. Est-ce que cette matrice est diagonalisable ?

Exercice 3.
On travaille dans $\mathbb{R}^4$. On désigne par T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -4 & -9 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3.1 Vérifier que le vecteur $(1, 1, -3, 2)$ est un vecteur propre de A. Pour quelle valeur propre ? On désigne alors par E l'espace propre associé à cette valeur propre. Déterminer une base de E.
3.2 Vérifier si $\lambda = 1$ est valeur propre de A ? Si oui déterminer une base de l'espace propre associé. Même question pour $\lambda = 0$.
3.3 Donner une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de A. On la désigne par $\mathcal{B}$. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ du vecteur $\vec{v} := (3, 1, -1, 0)$. Pour n entier positif, donner une expression de $T^n(\vec{v})$.

Exercice 4.
On considère l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels.

4.1 Quelle est la dimension de V ? En donner une base. On la désignera désormais par $\mathcal{B}$.

4.2 On considère l'application $f : V \to V$ définie par

$$f(P)(X) = P(X+1).$$

Montrer que c'est une application linéaire et écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

4.3 Déterminer tous les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4.4 Sauriez-vous généraliser ce résultat lorsque $V = \mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes de degré au plus n) ?

4.5 Sauriez-vous généraliser ce résultat lorsque $V = \mathbb{R}[X]$ (espace vectoriel des polynômes) ?

Exercice 5
Les valeurs propres de la matrice $A \in M(4, \mathbb{R})$ sont les nombres $1, 2, 3, 5$. Quels sont les valeurs propres de la matrice $A^2 + A$, de la matrice A^{-1} ?

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel. On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.
6.1 Vérifier que l'endomorphisme T de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est un projecteur. Calculer l'image et le noyau de T.
6.2 Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer qu'un endomorphisme T est un projecteur si et seulement si la matrice A de T dans $\mathcal{B}$ satisfait $A^2 = A$.
6.3 Montrer que si p est un projecteur de E et λ est une valeur propre de p alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Vérifier que $\ker(p)$ est égale à l'espace propre de $\lambda = 0$ et $Im(p)$ est égale à l'espace propre de $\lambda = 1$.
6.4 Proposer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ qui est la matrice (dans la base canonique) d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$ sur $Vect((1, -1))$.

Exercice 7
On considère la matrice $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
7.1 Calculer R^3.
7.2. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $R\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pour une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$.
Que peut-on déduire pour λ ?
7.3. Prouver que R n'a pas de valeur propre réelle.
7.4. Préciser la nature de l'endomorphisme ρ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est R.

Exercice 8*
Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ telle que $(A - 2I_4)^3 = 0$ et $A - 2I_4 \neq 0$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.