Exercice 1

Soit le système linéaire $S = \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x_1 & & -x_3 & & = & 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 4 \end{array} \right.$ d'inconnue $(x_1, x_2, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

1.1) Écrire la matrice élargie associée à S puis, par transformations de Gauss sur les lignes de matrices élargies successives, déterminer un système échelonné équivalent à S.

1.2) Préciser les variables de tête et les variables libres du système échelonné que vous avez obtenu, et en déduire le rang de S.

1.3) Sans calcul supplémentaire que pouvez vous dire de la nature géométrique du sous-ensemble $\mathcal{S}o\ell(S)$ de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions de S.

1.4) Résoudre le système échelonné obtenu et préciser cette nature géométrique en mettant en évidence un repère cartésien de $\mathcal{S}o\ell(S)$.

Exercice 2 Pour chaque valeur du paramètre réel α,

on considère le système linéaire homogène T_α, d'inconnue $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, de matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$.

2.1) Calculer, suivant les valeurs du paramètre α, le rang du système T_α .

2.2) On note F_α l'ensemble des solutions du système T_α.
Pourquoi F_α est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Préciser, selon la valeur de α, la dimension de F_α.

2.3) Pour chaque valeur de α telle que $dim(F_\alpha) \neq 0$, donner une base de F_α.

Exercice 3

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, et $\mathcal{F}$ la famille composée des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 de E suivants :
$v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_1 + e_4$, $v_3 = e_2 - e_3$, $v_4 = e_2 - 2e_3 - e_4$, $v_5 = e_1 - e_2$.

Pour tout vecteur v de E, on note $X_v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sa colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}_E$.

Soit $F = \mathcal{V}ect\,\{\mathcal{F}\}$, le s.e.v de E engendré par $\mathcal{F}$,

et G celui caractérisé dans la base $\mathcal{B}_E$ par le système linéaire homogène S de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.1) Déterminer la dimension de F et celle de G.

3.2) Donner une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G et montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

3.3) On note pr_F^G l'endomorphisme de E, de projection vectorielle sur F dans la direction G.

Rappeler, pour un vecteur quelconque v de E, la définition de $pr_F^G(v)$, puis calculer explicitement le vecteur $w = pr_F^G(u)$ pour le vecteur u de E défini par la donnée $X_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.4) Dans le cas explicite où E est l'espace vectoriel $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ des matrices carrées 2×2 réelles, et $\mathcal{B}_E$ sa base canonique ordonnée par le sens de lecture ligne par ligne, après avoir précisé explicitement les vecteurs $e_1, e_2, e_3, e_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$, ainsi que les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ de la question 3.2) et le vecteur u de la question précédente, donner explicitement dans ce cas le vecteur $w = pr_F^G(u)$.

Exercice 4 : E et F désignent deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

4.1) Parmi les applications de E dans F suivantes, précisez celles qui sont linéaires et donner si possible pour chacune d'elles une base de son noyau et une base de son image, et préciser si elle est injective, surjective, bijective.

4.1.1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^4$ et $\psi_1 = (\ (x,y,z) \mapsto (x-z, x-y+z, 0, y+2z)\ )$

4.1.2) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ et $\psi_2 = (\ (x,y,z) \mapsto (x-z, xy+z)\ )$

4.1.3) $E = \mathcal{M}(2,\mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\psi_3 = \left(\ M \mapsto (x \mapsto Trace(M)sin(x^2))\ \right)$

4.1.4) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ et $\psi_3 = \left(\ P \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{P}(0) & \tilde{P}'(0) \\ \tilde{P}(1) & \tilde{P}'(1) \end{pmatrix}\ \right)$
où $\tilde{P}$ désigne la fonction polynomiale réelle associée au polynôme P.

4.2) Parmi celles qui sont linéaires, lesquelles peut-on représenter à l'aide d'une matrice ?
Le faire en précisant vos choix de bases (si possible canoniques).

Exercice 5 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

5.1) Montrer que l'application $\psi = (P \mapsto P \circ X^2)$ est un endomorphisme de E.

5.2) Cet endomorphisme ψ est-il injectif ?

5.3) Est-il un automorphisme de E ?