On rappelle que les valeurs propres et espaces propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont ceux de l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

1.1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.
Peut-on trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A ?
Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
1.2. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ donné par la formule $f(P) = XP'$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer ses valeurs propres et espaces propres associés.
1.3. Trouver un exemple d'une matrice A non triangulaire telle que les valeurs propres de A sont $2, 7$ et 11.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
2.1 Le vecteur $(1, 1, 1)$ est-il un vecteur propre de A ? Si oui, pour quelle valeur propre ?
On note E l'espace propre associé à cette valeur propre. Déterminer une base de E.
2.2 On désigne par $E^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à E.
Vérifier que $E^\perp$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ et déterminer en une base $\mathcal{B}$ puis montrer qu'il est préservé par A , c-à-d que si $\vec{v} \in E^\perp$, alors $A\vec{v} \in E^\perp$.
2.3 On considère l'endomorphisme de $E^\perp$ qui transforme $\vec{v} \in E^\perp$ en $A\vec{v}$ (l'image de $\vec{v}$ par l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) .
Quelle est la matrice de cet endomorphisme dans la base $\mathcal{B}$ de $E^\perp$?
2.4 Construire une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
2.5 Soit $\vec{v}_0 = (1, -1, 3)$. Calculer $A^n\vec{v}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$.
3.1 Est-ce que le vecteur $\vec{u} = (1, 0, 1)$ est un vecteur propre de A ? Si oui, pour quelle valeur propre ?
3.2 Montrer que 2 est une valeur propre de A et déterminer l'espace propre correspondant.
3.3 Est-ce que 0 est une valeur propre de A ?
Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
3.4 Soit $P \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
Calculer la matrice P^{-1}, inverse de P.
3.5 Calculer $P^{-1}AP$.
3.6* Utiliser ce résultat pour déterminer l'ensemble des matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 4
Les valeurs propres de la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ sont les nombres $2, 3, 5, 7$.
Trouver les valeurs propres de la matrice $A^2 + A$.
Même question pour $A^{-1} + I_4$.

Exercice 5

5.1 Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5.2 Même question pour la matrice : $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 6
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note par ι la fonction identité sur $\mathbb{R}$, $\iota(x) = x$. Soient F et G les deux endomorphismes de E définis par $F(f) = \iota \times f$ et $G(f) = f'$.
Trouver les vecteurs et les valeurs propres de F et G.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application linéaire telle que $f^3 = Id_{\mathbb{C}^n}$.
7.1 Montrer que les valeurs propres de f sont des racines de 1 d'ordre 3.
7.2 Montrer que f se diagonalise sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8
On considère la matrice $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
8.1 Calculer R^3.
8.2. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $R\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pour une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$.
Que peut-on déduire pour λ ?
8.3. Prouver que R n'a pas de valeur propre réelle.
8.4. Préciser la nature de l'endomorphisme ρ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est R.

Exercice 9
On définit par récurrence $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$ pour $n > 2$.
Déterminer, pour $n > 2$, l'expression du terme a_n en fonction de n.
Même question dans le cas où $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}$.