UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2016/2017**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 3

Exercice 1
Calculer si possible les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ -8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Le but de cet exercice est de démontrer la formule

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

1) En voyant ce déterminant comme une fonction de a, que peut-on dire de cette fonction ? Idem avec b et c.
2) En regardant les lignes de la matrice que peut on dire de ces fonctions ?
3) Déduire de ce qui précède que ce déterminant s'écrit sous la forme $\alpha(b-a)(c-a)(c-b)$ avec α constante indépendante de a,b,et c.
4) Montrer que $\alpha = 1$.
5) On appelle déterminant de Vandermonde un déterminant de ce type, de taille n quelconque.
Retrouvez-le dans la littérature et vérifiez que vous comprenez maintenant son expression factorisée.

Exercice 3
Donner une expression simple des déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos(2a) & \cos(a) & 1 \\ \cos(2b) & \cos(b) & 1 \\ \cos(2c) & \cos(c) & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos(t) & \cos(2t) \\ \cos(t) & \cos(2t) & \cos(3t) \\ \cos(2t) & \cos(3t) & \cos(4t) \end{vmatrix}$$

Exercice 4
1) Pourquoi peut-on définir le déterminant et le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ?
2) On considère l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\Phi(P) = X^2P'' - (X-1)P' + 2P$.
Calculer le déterminant de Φ et en déduire si Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3) Calculer son polynôme caractéristique, et en déduire les valeurs propres de Φ.
4) Sans calcul supplémentaire, peut-on dire si Φ est diagonalisable ?