UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2017/2018
Algèbre 2
Feuille 3

Exercice 0.

Calculer les déterminants des matrices suivantes. :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.

Pour chacune des matrices de l'exercice précedent :

1.1 Calculer son polynôme caractéristique sous une forme factorisée.
1.2 En déduire sa ou ses valeurs propres réelles.
1.3 Calculer la dimension des espaces propres associés à ses valeurs propres réelles.
1.4 En déduire si elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
1.5 Parmi ces matrices, lesquelles ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2

On considère l'application linéaire T de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2.1 Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.
Représenter graphiquement K et $T(K)$. Calculer leurs aires.

2.2 Montrer que T est diagonalisable et le diagonaliser dans une base (v, w) de $\mathbb{R}^2$.

2.3 Soit $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = \alpha v + \beta w \text{ avec } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}$.
Représenter graphiquement L et $T(L)$. Calculer leurs aires.

Exercice 3

Donner une expression simple des déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}.$$

Exercice 4

1) Pourquoi peut-on définir le déterminant et le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ?

2) On considère l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\Phi(P) = X^2P'' - (X+1)P' + 2P$.
Calculer le déterminant de Φ et en déduire si Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3) Calculer son polynôme caractéristique, et en déduire les valeurs propres de Φ.
4) Sans calcul supplémentaire, peut-on dire si Φ est diagonalisable ?

Exercice 5.

1) Donner une équation du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,2,3)$ et $(-3,5,1)$.

2) Soit $(u_1, ...u_{n-1})$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Donner à l'aide d'un déterminant, une équation de l'hyperplan engendré par cette famille.

Exercice 6.

Considerons le systeme

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & & = & 4 \\ -x & +3y & & = & 0 \\ -x & +y & +2z & = & 4 \end{array} \right.$$

5.1 Quelle est la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ de ce système ? Calculer la matrice inverse de A en utilisant la formule des cofacteurs.

5.2 Résoudre le système S

a) par la méthode de Gauss

b) en calculant $A^{-1}b$, où $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) en utilisant les formules de Cramer.