Université Nice Sophia Antipolis
UFR Sciences
Département de Mathématiques

2017/2018
Algèbre 2
Feuille 4

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Déterminer parmi les applications $(u,v) \to \langle u|v\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui définissent un produit scalaire sur E.

1.1. $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P|Q\rangle = P(0)Q(1) + P(1)Q(0)$;
1.2. $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$;
1.3. $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x_1.x_2)|(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2$;
1.4. $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x_1,x_2)|(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2$;
1.5. $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x,.x_2)|(y_1,y_2)\rangle = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$;
1.6. $E = M_n(\mathbb{R})$, $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

Exercice 2.

1. Soit E un espace euclidien et soit $v_1, ..., v_k$ une famille orthogonale de vecteurs non-nulles de E (c.à.d $\langle v_i|v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ et $v_i \neq 0$ pour tout i). Montrer que cette famille est libre.
2. On travaille dans l'espace $Cont([0,2\pi])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,2\pi]$ muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\mathcal{F}_n$ des fonctions $\sin kx$, $0 < k \leq n$ est une famille orthogonale. (Indice : utiliser la formule pour $\sin a \sin b$)
   (b) En déduire que $\mathcal{F}_n$ est une famille libre de $Cont([0,2\pi])$.
   (c) Que peut-on en déduire sur la dimension de $Cont([0,2\pi])$?

Exercice 3.
Soit $\vec{u} = (u_1,u_2)$ et $\vec{v} = (v_1,v_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

3.1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\|\vec{u} + c\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2c\,\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle + c^2\|\vec{v}\|^2.$$

3.2. Montrer que l'aire du parallélogramme $ABCD$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = AD$ est égale à

$$A = (\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle^2)^{1/2}.$$

Exercice 4.
On considère dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, un sous-espace vectoriel F et un vecteur x. Calculer la projection orthogonale de x sur F pour les données suivantes :

4.1. $n = 2$, $x = (1,1)$, $F = \mathrm{Vect}((1,2))$.
4.2. $n = 4$, $x = (1,-1,0,1)$, $F = \mathrm{Vect}((1,1,2,-1),(3,1,1,-2))$.
4.3. $n = 4$, $x = (1,-1,0,1)$, $F = \{3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\}$.
4.4. $n = 4$, $x = (1,-1,0,1)$, $F = \{3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0,\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

Exercice 5.
On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

5.1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

5.2. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ on a $\varphi(P, Q) = Q(0)$?

5.3. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 6.
On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel ainsi que la famille de vecteurs
$\mathcal{F} = ((1, 2, 1, 0), (0, -1, 2, 1), (-1, 0, 1, 2))$.

6.1. Justifier que l'on peut appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille $\mathcal{F}$.

6.2. Orthonormaliser la famille $\mathcal{F}$.

6.3. Peut-on en déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ pour le produit scalaire usuel ?

Exercice 7.
Pour les deux questions suivantes, on pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis (peut-être après quelques manipulations).

7.1. Soit E un espace vectoriel euclidien pour un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ de norme associée $\| \cdot \|$. Montrer que pour $x_1, \ldots, x_n \in E$, $n \geq 1$, on a $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

7.2. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 8.
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$ où $(a_1, ..., a_n)$ sont des réels donnés non tous nuls.
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur H.

Exercice 9.
Soit $E = \mathbb{R}^2$ et pour $x = (x_1, x_2) \in E$ soit l'application

$$N(x) = (3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2)^{1/2}.$$

9.1. Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.

9.2. Déterminer une base de E, orthonormale pour ce produit scalaire.

9.3. Soit $F = \{(x_1, x_2) \in E, x_1 - 2x_2 = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.