UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2017/2018
Algèbre 2
feuille 5

Exercice 1. Compléter $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose A^n est la matrice nulle. Déterminer A.

Exercice 3. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. On désigne par f la projection orthogonale $pr_P^\perp$ sur le plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$.

(a) Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?

(b) Trouver une b.o.n. $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $g = s_P^\perp$ la symétrie orthogonale par rapport au plan P. Quelle est la matrice de g dans la base canonique ? dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 4. Considérons la matrice à coefficients complexes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A, est-elle symétrique ? est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.

(b) Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de la matrice A.

(c) Déterminer une matrice orthogonale P (c.-à.-d. telle que ${}^tPP = I_n$) et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $rgA = rg\ {}^tAA$.
(Indice : Montrer que $\ker\ {}^tAA = \ker A$)

Exercice 7.

(a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Est-ce que la matrice $P^{-1}AP$ est aussi symétrique ? Si non, donner des exemples.

(b) Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de matrices symétriques. Trouver la dimension de $S_n(\mathbb{R})$.

(c) Soit $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donner par $F(A) = {}^tA$. Montrer que l'application F se diagonalise.

Exercice 8.

(a) Montrer que le système

$$\begin{cases} 2x + y = \ 1 \\ -x + y = 1 \\ x + 2y = \ 1 \end{cases} \tag{1}$$

n'a pas de solution.

(b) Soit $A \in M(3, 2, \mathbb{R})$ la matrice du système (1). Résoudre l'équation matricielle d'inconnue $Y \in M(2, 1, \mathbb{R})$

$${}^tAAY = {}^tAB, \qquad \text{où } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(c) Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, on considère les vecteurs $u = (2, -1, 1)$, $v = (1, 1, 2)$. On note $E = Vect(u, v) \subset \mathbb{R}^3$.

(i) Proposer une base orthonormée de E en appliquant à la famille (u, v) l'algorithme de Gram-Schmidt. Calculer la projection orthogonale de b sur E.

(ii) Soit Y la solution de (2). Vérifier que la matrice AY est la colonne de coordonnées de la projection orthogonale de $b = (1, 1, 1)$ sur E, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.