UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2015/2016**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 4

Exercice 1.

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

2.1. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

2.2. Simplifier les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ \cos(x) & \cos(2x) & \cos(3x) \\ \cos(2x) & \cos(3x) & \cos(4x) \end{vmatrix}$$

Exercice 3.

Pour chacune des matrices suivantes :

3.1 Calculer son polynôme caractéristique sous une forme factorisée.

3.2 En déduire sa ou ses valeurs propres réelles.

3.3 Calculer les dimensions des sous-espaces propres associés à ses valeurs propres réelles.

3.4 En déduire si elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5 Parmi les matrices ci-dessus, lesquelles ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{C}$?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{A}$ un endomorphisme de E.
Montrer que si deux matrices A_1 et A_2 représentent l'endomorphisme $\mathcal{A}$ respectivement dans deux bases distinctes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E alors elles ont le même déterminant, et elles ont aussi le même polynôme caractéristique.
Conséquence : On peut définir ainsi le déterminant et le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5.1 Calculer le polynôme caractéristique de u.

5.2 Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

5.3 En déduire que u est diagonalisable et le diagonaliser dans une base explicite.

Exercice 6.
Ici, le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Soit E un plan vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
On considère l'endomorphisme ϕ de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

6.1 Calculez et factorisez le polynôme caractéristique de ϕ.
6.2 ϕ est-il diagonalisable ? Si oui construire une base de E qui le diagonalise .
6.3 Mêmes questions avec l'endomorphisme ψ de E de matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7.
Soient a, b, c trois réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique
$$F = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

7.1 Calculer le déterminant de ϕ et son rang.
7.2 Déterminer l'image et le noyau de ϕ, comparez-les.
7.3 On pose $\psi = Id_{\mathbb{R}^3} - \phi$.
Calculer les matrices de ϕ^2, $\psi \circ \phi$, $\phi \circ \psi$ et ψ^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
7.4 Déterminer l'image et le noyau de ψ, comparez-les avec ceux de ϕ.
7.5 Déterminer les valeurs propres et espaces propres de ϕ et ψ.
7.6 Caractériser géométriquement les endomorphismes ϕ et ψ.

Exercice 8.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.1 Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
8.2 Calculer $(A - I)^2$.
En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $A^n = nA + (1 - n)I$.
8.3 Soit le polynôme $P = (X - X^0)^2 \in \mathbb{R}[X]$.
Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' désigne le polynôme dérivé de Q.
En remarquant que P(A)=0 et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver l'expression de A^n.

Exercice 9.
Soit E un plan vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$ et (e_1, e_2) une base donnée de E.
Pour a et b donnés dans $\mathbb{K}$, on considère l'endomorphisme Φ de E de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2).
9.1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Etudier le rang de l'endomorphisme $\Phi - \lambda Id_E$ en fonction de λ, a, et b et en déduire l'ensemble des valeurs propres de Φ selon les valeurs de a et b.
9.2 Pour quelles valeurs du couple (a, b) l'endomorphisme Φ est-il non diagonalisable ?
9.3 Quand il l'est, diagonaliser l'endomorphisme Φ dans une base de E explicite.