UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2014/2015**

Faculté des Sciences Algèbre 2

Département de Mathématiques Corrigé du partiel

Page web : `http://math.unice.fr/~parus/A2_2013.html`

Exercice I.

1. Le rang d'une matrice est la dimension de son image.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rg}(A - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

2. $\mathrm{Ker}(A + 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}((0,1,1))$

   $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

3. Comme $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2 < 3$, 2 est une valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à 2 est $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}((1,1,0))$.

   Comme $\dim \mathrm{Ker}(A + 2I_3) = 1 \neq 0$, -2 est une valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à -2 est $E_{-2} = \mathrm{Ker}(A + 2I_3) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$.

   Comme $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 1 \neq 0$, 1 est une valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à 1 est $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

   La matrice A étant de taille $(3,3)$, il n'y a pas d'autre valeur propre.

4. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP = D$.

5. Comme $A = PDP^{-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} A^3 - A^2 - 4A &= (PDP^{-1})^3 - (PDP^{-1})^2 - 4PDP^{-1} \\ &= PD^3P^{-1} - PD^2P^{-1} - 4PDP^{-1} \\ &= P(D^3 - D^2 - 4D)P^{-1} \end{aligned}$$

   Donc $A^3 - A^2 - 4A = cI_3 \Leftrightarrow D^3 - D^2 - 4D = cP^{-1}P = cI_3$.

   Puis $D^3 - D^2 - 4D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   Donc $A^3 - A^2 - 4A = cI_3 \Leftrightarrow c = -4$.

6. D'après la question précédente, $A\left(-\frac{1}{4}(A^2 - A - 4I_3)\right) = \left(-\frac{1}{4}(A^2 - A - 4I_3)\right)A = I_3$. Donc $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^2 - A - 4I_3)$.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{4}\left(A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

λ valeur propre de B et X vecteur propre de B associé à λ
$\Leftrightarrow BX = \lambda X$
$\Leftrightarrow AX = (3\lambda - 1)X$
$\Leftrightarrow 3\lambda - 1$ valeur propre de A et X vecteur propre de A associé à $3\lambda - 1$

Donc les valeurs propres de B sont

- 1 et $\mathrm{SEP}(B, 1) = \mathrm{SEP}(A, 2) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$
- $-\frac{1}{3}$ et $\mathrm{SEP}(B, -\frac{1}{3}) = \mathrm{SEP}(A, -2) = \mathrm{Vect}((0, 1, 1))$
- $\frac{2}{3}$ et $\mathrm{SEP}(B, \frac{2}{3}) = \mathrm{SEP}(A, 1) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$

Donc $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B.

(b) $(0, 0, 1) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 1 \end{array}\right.$

Donc $U_n = B^n U_0 = -B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$

et $U_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} (-1, -1, 0)$.

Exercice II.

1. Une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telles que $M = PDP^{-1}$.
2. Le polynôme caractéristique de la matrice M est $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda = \lambda(\lambda - (a+b))$.
   - Premier cas : si $a + b \neq 0$ alors le polynôme caractéristique de M est scindé à racines simples et M est diagonalisable.
   - Deuxième cas : si $a + b = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ alors 0 est racine double du polynôme caractéristique de M. Comme $\dim \mathrm{Ker}(A - 0I_2) = 1 \neq 2$, M n'est pas diagonalisable.
   - Troisième cas : si $(a, b) = (0, 0)$, M est diagonalisable.

   Donc M est diagonalisable si et seulement si $(a, b) = (0, 0)$ ou $a + b \neq 0$.
3. Soit $x \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. Alors $f(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$ et $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a forcément $x = 0$.