UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2013/2014**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Durée 2 h

Contrôle Terminal. Éléments de correction.

Documents, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifier toute réponse. À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1. On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^4$ est la suivante :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Que peut-on dire a priori (à l'aide des théorèmes du cours et sans calcul) sur les valeurs propres et les vecteurs propres de A ?

(b) Vérifier que 1 est valeur propre de A. On désigne par E_1 l'espace propre correspondant. Déterminer une base orthonormée de E_1.

(c) Déterminer une base orthonormée de $F = E_1^\perp$ et montrer que F est un espace propre de A. De quelle valeur propre ? Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de la matrice A.

(d) Quel est le rang de la matrice A ? Combien vaut son déterminant ? Quel est son polynôme caractéristique ? Justifier vos réponses.

(e) Montrer que f est une symétrie orthogonale. Écrire la matrice A' de l'application f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer une matrice orthogonale P telle que $A' = P^{-1}AP$. Calculer P^{-1}.

(a) A est symétrique à coefficients réels. Alors, par un théorème du cours, les valeurs propres de A sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormée .

(b) Les lignes de la matrice $A - I_4$ sont toutes proportionnelles à la première, non nulle. Elle est donc de rang 1. L'espace propre E_1 est donc de dimension $4 - 1 = 3$. L'espace E_1 est l'ensemble des solutions de l'unique équation $-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Une base de l'espace des solutions est $((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$. Pour obtenir une base orthogonale on utilise l'algorithme de Gram-Schmidt : $((1, 1, 0, 0), (-1/2, 1/2, 1, 0), (1/3, -1/3, 1/3, 1))$. En normalisant ces vecteurs, on en déduit une base orthonormée de E_1 :

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2, 0), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, 1, 3)).$$

(c) F est dimension 1 engendré par $(-1, 1, -1, 1)$, qui est un vecteur propre de A de valeur propre -1. Alors $\frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$ est une base orthonormée de F et

$$\mathcal{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2, 0), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, 1, 3), \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)).$$

(d) Le déterminant de A est égale au produit des valeurs propres $\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$. Alors A est inversible et le rang de A est 4. Le polynôme caractéristique est $(T+1)(T-1)^3$. On connait en effet ses racines avec leur multiplicités et le coefficient du terme de plus haut degré qui est 1.

(e) En effet, $A^2 = 1$ et E_1 et orthogonale à $E_{-1} = F$.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}_0$. Elle vaut

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

(a) Rappeler la définition d'une matrice orthogonale. La matrice A de l'exercice 1, est-elle orthogonale ?

(b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et orthogonale. Montrer que M est une symétrie orthogonale, c.à.d. $M^2 = I_n$.

(c) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et symétrique définie positive. Montrer que $M = I_n$.

(a) Une matrice carré $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient ${}^tAA = I_n$, est appelée matrice orthogonale. Par exemple la matrice A de l'exercice 1 est orthogonale.

(b) ${}^tM = M$ puisque M est symétrique. Si en plus M est orthogonale alors $M^2 = {}^tMM = I_n$

(c) Soit v un vecteur propre de M et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire de matrice M dans la base canonique. Alors $f(v) = v$ ou $f(v) = -v$. Le dernier cas n'est pas possible. En effet, si $f(v) = -v$ alors $\langle v | f(v) \rangle = -\|v\|^2$ c' est qui contredit l' hypothèse que M est définie positive. Alors 1 est la seule valeur propre de M. La matrice M est symétrique réelle et donc admet une base formée des vecteurs propres. On en déduit que f est l'identité.

Exercice 3. Soit E un plan vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$ et (e_1, e_2) une base donnée de E. On considère l'endomorphisme Φ de E de matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$$

dans la base (e_1, e_2).

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Etudier le rang de l'endomorphisme $\Phi - \lambda Id_E$ en fonction de λ, a, et b et en déduire l'ensemble des valeurs propres de Φ selon les valeurs de a et b.

(b) Pour quelles valeurs du couple (a,b) l'endomorphisme Φ est-il non diagonalisable ?

(c) Diagonaliser l'endomorphisme Φ dans une base de E explicite, lorsque cela est possible.

(a) Par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ suivie par $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$

$$rang\begin{pmatrix} a-\lambda & 1-b \\ 1-a & b-\lambda \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} a-\lambda & 1-b \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} a+b-1-\lambda & 1-b \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

On voit alors clairement sur cette dernière matrice que

$$rang(\Phi - \lambda Id_E) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq a+b-1 \\ 1 & \text{si } (\lambda = 1 \text{ ou } \lambda = a+b-1) \text{ et } (a,b) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } a = b = \lambda = 1 \end{cases}$$

(b) Si $a+b-1 \neq 1$ l'endomorphisme Φ a deux valeurs propres simples, il est donc diagonalisable. Si $a+b=1$, $\lambda = 1$ est une valeur propre double et l'espace propre E_2 est de dimension 2 si et seulement si $a=b=1$. Alors Φ n' est pas diagonalisable si et seulement si $a+b-1=1$ et $(a,b) \neq (1,1)$.

(c) Pour diagonaliser Φ nous allons chercher une base (u,v) de E formée de deux vecteurs propres indépendants.
Si $a+b-1 \neq 1$ alors $u = (1,-1)$ est un vecteur propre de la valeur propre $\lambda = a+b-1$ et $v = (b-1, a-1)$ est vecteur propre de la valeur propre $\lambda = 1$.
Si $a=b=1$ alors $\Phi = Id$ est diagonale, comme il serait dans n'importe quelle base de E.

Exercice 4. *(4 points)* Soient a,b,c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

(a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.

(b) On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$. On pourra procéder par récurrence double.

(a) En développent par rapport à la première ligne

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{0} & \cancel{\dots} & \cancel{0} \\ \cancel{c} & a & b & \ddots & \vdots \\ \cancel{0} & c & a & \ddots & 0 \\ \cancel{\vdots} & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \cancel{0} & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{0} & \cancel{\dots} & \cancel{0} \\ c & \cancel{a} & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cancel{c} & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \cancel{\ddots} & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cancel{\dots} & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

et le deuxième déterminant par rapport à la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} - bc \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

(b) Par récurrence sur n

$$\begin{aligned} \Delta_{n+2} &= a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n = a\frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}} - bc\frac{(n+1)a^n}{2^n} = a\frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a^2}{4}\frac{(n+1)a^n}{2^n}. \\ &= (2n+4-n-1)\frac{a^{n+2}}{2^{n+2}} = (n+3)\frac{a^{n+2}}{2^{n+2}}. \end{aligned}$$