UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2014/2015**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Durée 2 h

Contrôle Terminal

Documents, téléphones portables et calculatrices sont interdits.
Justifier toute réponse.
À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer, ces résultats doivent alors être cités correctement.

Exercice 1. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel,
on considère le plan F d'équation $x + 2y - z = 0$ dans la base canonique.
On désigne par f la projection orthogonale $pr_F^{\perp}$ sur le plan F.

(a) Trouver une base orthonormée de F.

(b) Calculer $f(1, 3, -1)$ et puis $f(a, b, c)$ pour (a, b, c) quelconque dans $\mathbb{R}^3$.

(c) Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Donner la matrice de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan F dans la base $\mathcal{B}$, puis sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels.

(a) Montrer que $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

(b) Soit l'application linéaire $f : E \to E$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé $f(P) := P'$.
Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.
L'application f est-elle diagonalisable ?

(c) Déterminer une base de E orthogonale pour le produit scalaire φ .

Exercice 3. On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) On désigne par S le produit ${}^tMM$. Que peut-on dire à priori (à l'aide des théorèmes du cours et sans calcul numérique) sur les valeurs propres et les vecteurs propres de S ?

(b) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, formée de vecteurs propres de S.
On désigne par P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à cette base $\mathcal{B}$.
Calculer P^{-1}.

(c) Calculer $P^{-1}SP$ puis S^{2014}.

(d) Proposer une matrice diagonale D telle que $D^2 = P^{-1}SP$.
En déduire une matrice symétrique R telle que $R^2 = S$.

(e) (*Cas général*). On considère M une matrice $n \times m$ à coefficients réels.

   (i) Montrer que la matrice $S := {}^tMM$ est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

   (ii) Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle R telle que $R^2 = S$.