**UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS** **2015/2016**
**Faculté des Sciences** Algèbre 2
**Département de Mathématiques** Durée 2 h

Contrôle Terminal

*Documents, téléphones portables, calculatrices sont interdits.*
*Justifier toute réponse. À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer. Ces résultats doivent être cités correctement.*

**Exercice 1.**
On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^4$ est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Que peut-on dire a priori (à l'aide des théorèmes du cours et sans calcul) sur les valeurs propres et les espaces propres de $A$ ?

(b) Vérifier que 3 est valeur propre de $A$. On désigne par $E_3$ l'espace propre correspondant. Déterminer une base orthonormée de $E_3$.

(c) Déterminer une base orthonormée de $F = E_3^\perp$ et montrer que $F$ est un espace propre de $A$. Pour quelle valeur propre ? Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de la matrice $A$.

(d) Quel est le rang de la matrice $A$ ? Combien vaut son déterminant ? Quel est son polynôme caractéristique ? Justifier vos réponses.

(e) Écrire la matrice $A'$ de l'application $f$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer une matrice orthogonale $P$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

(f) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $E_3$ dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

(a) *$A$ est symétrique à coefficients réels. Alors, par un théorème du cours, les valeurs propres de $A$ sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormée . Les espaces propres de $A$ sont deux-à-deux orthogonaux.*

(b) *Les lignes de la matrice $A - 3I_4$ sont toutes proportionnelles à la première, non nulle. Elle est donc de rang 1. L'espace propre $E_3$ est donc de dimension $4-1=3$. L'espace $E_3$ est l'ensemble des solutions de l'unique équation $-x_1+x_2-x_3+x_4=0$.*

*Une base de $E_3$ est $((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$, qui, par l'algorithme de Gram-Schmidt, donne une base orthogonale : $((1,1,0,0),(-1/2,1/2,1,0),(1/3,-1/3,1/3,1))$. Ensuite, en normalisant ces vecteurs, on en déduit une base orthonormée :*

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0),\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,1,3)).$$

(c) *$F$ est de dimension 1 engendré par $(-1,1,-1,1)$, qui est un vecteur propre de $A$ de valeur propre $-1$. Alors $\frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$ est une base orthonormée de $F$ et*

$$\mathcal{B}=(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0),\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,1,3),\frac{1}{2}(-1,1,-1,1)).$$

(d) *Le déterminant de $A$ est égale au produit des valeurs propres $\det A = 3\cdot 3\cdot 3\cdot(-1) = -27$. Alors $A$ est inversible et le rang de $A$ est 4. Le polynôme caractéristique est $(T+1)(T-3)^3$. On connait en effet ses racines avec leur multiplicités et le coefficient du terme de plus haut degré qui est 1.*

(e)

$$A'=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

*La matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}_0$. Elle vaut*

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(f) *la matrice de la projection orthogonale sur $E_3$ dans la base $\mathcal{B}$ est*

$$B'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}(A'+I_4)$$

*et dans la base canonique $\mathcal{B}_0$*

$$B=PB'P^{-1}=\frac{1}{4}(A+I_4)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\-1&1&3&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.**

(a) Ecrire sous forme matricielle le problème suivant :
*Trouver tous les triplets de réels $(a, b, c)$ tels que :*
*La différence de $a$ et $b$ est $-2$, la différence de $b$ et $c$ est $4$, la différence de $c$ et $a$ est $-2$.*
Résoudre ce problème.

(b) Considérer le même problème pour les différences : 3, 1, $-1$. Montrer que ce problème n'a pas de solution exacte. Résoudre ensuite ce problème au sens des moindres carrés, c.-à.-d. trouver l'ensemble des réels $(a, b, c)$ qui minimisent l'expression :

$$(a-b-3)^2 + (b-c-1)^2 + (c-a+1)^2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

*Solutions pour le (a) : $a = c+2, b = c+4$, $c \in \mathbb{R}$. Pour montrer qu'il n'y a pas de solution pour les différences 3, 1, $-1$, on échelonne la matrice augmentée*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

*La dernière ligne donne l'équation $0 = 3$ qui n'a pas de solutions.*
*Si on note l'équation (1) par $Au = v$, où $u = {}^t(a, b, c)$ alors la méthode des moindres carrés consiste à résoudre le système $({}^tAA)u = ({}^tA){}^t(3, 1, -11) = {}^t(4, -2, -2)$ c.à.d.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

*Les solutions sont $a = c + 2, b = c$, $c \in \mathbb{R}$.*

**Exercice 3.**

(a) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

Donner la réponse sous une forme factorisée.
(Vous pouvez utiliser la formule $\begin{vmatrix} 1 & a^3 \\ 1 & b^3 \end{vmatrix} = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$.)

(b) Même question pour

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

*Corrigé :*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 0 & (c-b)(c+b+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(c+b+a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 1 & c+a & c^2+ca+a^2 \\ 0 & 1 & d+a & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 0 & c-b & (c-b)(c+b+a) \\ 0 & 0 & d-b & (d-b)(d+b+a) \end{vmatrix} = \ldots =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

**Exercice 4.** On donne la matrice suivante dans $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Étudier le comportement quand $n$ tend vers l'infini de la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de premier terme $U_0 = (0, 6, 0, 4)$, définie pour $n \geq 0$ par $U_{n+1} = AU_n$.
(Indice : on pourra chercher une base composée de vecteurs propres de $A$)

(b) Est-ce que la réponse dépend du premier terme $U_0$ ? Justifier.

*Les vecteurs propres de $A$ sont : $V = (1, 1)$ de la valeur propre $0,5$ et $W = (1, -1)$ de la valeur propre $2$. On écrit $U_0$ dans la base $\{V, W\}$ : $U_0 = 0,5V + 0,1W$. Alors*

$$U_n = A^n U_0 = 0,5A^n V + 0,1A^n W = (0,5)^{n+1}V + (0,1)2^n W$$

*ce qui montre que $\|U_n\| \to \infty$ et $\|U_n - 2^n(0,1W)\| \to 0$ si $n \to \infty$.*
*En général, si $U_0 = aV + bW$ alors $U_n = a(0,5)^n V + b2^n W$. Alors le comportement de la suite $U_n$ dépend du choix de $U_0$ : $\|U_n\| \to \infty$ ssi $b \neq 0$, sinon $\|U_n\| \to 0$. Plus précisement, nous avons toujours,*

$$\|U_n - b\ 2^n W)\| \to 0.$$